Programma del corso di Analisi Matematica II

Anno Accademico 2022/23
Corso di Laurea in Ingegneria Energetica

Sapienza Università di Roma

Calcolo infinitesimale e differenziale per funzioni di più variabili: Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$: definizione di $\mathbb{R}^n$, operazioni, prodotto scalare, norma, distanza euclidea, diseguaglianza triangolare. Intorni sferici aperti e chiusi, esempi. Punti esterni, interni, di frontiera. Insiemi aperti, chiusi, limitati e compatti. Interno e chiusura di un insieme. Punti di accumulazione e isolati, il simbolo infinito. Funzioni di più variabili: dominio, codominio immagine, grafico. Dominio naturale di funzioni di due variabili reali: esempi di studio e relative proprietà topologiche. Funzioni limitate, estremo superiore di una funzione e punti di massimo e di massimo relativo. Teorema di Weiestrass e dei valori intermedi. Definizione di limite. Esempi.

Continuità di funzioni di più variabili a valori scalari: definizione, continuità della funzione proiezione, chiusura della continuità rispetto a somma, prodotto e composizione. Restrizioni, teorema delle restrizioni per l'esistenza del limite. Restrizioni per rette. Coordinate polari, convergenza uniforme e applicazioni al calcolo dei limiti di funzioni di due variabili. Derivate direzionali, parziali, funzioni derivabili, gradiente. La derivabilità non implica la continuità (lo studente deve essere in grado di fornire un controesempio). Differenziabilità, piano tangente, approssimazione lineare di funzioni differenziabili. Condizioni necessarie di differenziabilità (con dimostrazione), continuità e/o derivabilità non implicano differenziabilità (con controesempi). Funzioni di classe C^0 e C^1. Teorema del differenziale totale. Proprietà geometriche del gradiente: piano tangente al grafico di una funzione differenziabile. La differenziabilità implica esistenza di tutte le derivate parziali (con dimostrazione). Direzione di massima discesa. Derivate di ordine superiori: derivate direzionali e parziali di secondo ordine, matrice hessiana. Funzioni due volte differenziabili, teorema di Schwarz. Polinomio di Taylor in più variabili. Polinomio di Taylor di secondo grado, forme quadratiche. Matrici e forme quadratiche definite positive, negative, semidefinite e indefinite. Caratterizzazione di matrici definite positive, negative, indefinite tramite autovalori e tramite determinante. Una matrice simmetrica ha autovalori reali (con dimostrazione).Teorema di Taylor con resto di Peano per polinomi di secondo grado.

Estremi liberi di funzioni di più variabili. nsiemi convessi, combinazioni convesse, funzioni convesse, strettamente convesse, localmente convesse (risp. concave). Le funzioni convesse sono continue. Caratterizzazione di funzioni localmente convesse differenziabili tramite confronto con il loro piano tangente. Punti stazionari e punti di minimo relativo. Punti di minimo relativo di funzioni differenziabili. per la matrice Hessiana, tramite determinante e traccia. Caratterizzazione di estremi locali differenziabili tramite stazionarietà e concavità/convessità (con dimostrazione). Estremi locali e punti di sella. Esempi. Caratterizzazione di convessità e concavità di funzione di classe C^2 (con dimostrazione).Classificazione dei punti stazionari di una funzione di due variabili.

Curve, integrali curvilinei, forme differenziali. Curve, sostegno di una curva. Esempi di curve e loro sostegni, nel caso di circonferenze, poligoni, ellissi. Curve semplici, chiuse, piane. Curve di Jordan. Orientazione di una curva e curve di Jordan positivamente e negativamente orientati. Curve equivalenti, riparametrizzazioni. Vettori velocità/tangenti, curve regolari. versore tangente di curve equivalenti (con dimostrazione). Lunghezza di una curva, curve rettificabili. Superfici elementari: esempi e definizione.. Lunghezza di una curva: curve rettificabili, definizione di lunghezza di una curva C^1. Esempi: curve cartesiane. Curve C^1 equivalenti hanno la stessa lunghezza (con dimostrazione).

Integrazioni su curve C^1 a tratti.Curve C1 a tratti e parametrizzazione di curve definite a tratti. Integrali di prima specie su curve C^1 a tratti. Forme differenziali, integrali curvilinei di seconda specie e loro interpretazione fisica. Integrali di seconda specie di curve equivalenti (con dimostrazione). Forme differenziali esatte, chiuse, tutte le forme differenziali esatte sono anche chiuse (con dimostrazione). Teorema sul calcolo di integrali curvilinei di forme differenziali esatte tramite loro primitiva (con dimostrazione). Caratterizzazione delle forme differenziali esatte tramite integrali curvilinei di curve chiuse e di coppie di curve con gli stessi estremi. Forme differenziali chiuse ma non esatte: un controesempio. Insiemi semplicemente connessi, omotopie. Gli insiemi convessi sono semplicemente connessi (con dimostrazione). Le forme differenziali chiuse su insiemi semplicemente connessi sono esatte. Calcolo della funzione primitiva di forme differenziali esatte.

Calcolo integrale per funzioni di più variabili: Insiemi normali e loro misura, partizioni normali. Esistenza di partizioni normali con diametro arbitrario, somme integrali, intersezioni di partizioni normali e monotonia delle somme integrali. Funzioni integrabili, le funzioni continue sono integrabili. Formule di riduzione per domini normali. Integrazione su rettangoli. Cambio di coordinate, matrice Jacobiana, coordinate polari e relativa matrice Jacobiana. Teorema di cambiamento di variabili per integrali doppi. Esempio di applicazione alle coordinate polari. Coordinate ellittiche. Integrali tripli, domini semplici. Formule di riduzione per fili. Formule di riduzione per strati. Calcolo del volume di solidi di rotazione. Cambio di coordinate per integrali tripli: coordinate cilindriche e sferiche.

Superfici ed integrali di superficie: Superfici e loro parametrizzazione. Parametrizzazione del cilindro, della sfera, del cono e dei piani, superfici cartesiani. Punti interni e di bordo di una superficie. Superfici regolari, definizione, piano tangente, versori normali. Esempio: studio del cilindro. Area di una superficie: area del cilindro, della sfera, di superfici cartesiane. Integrali di superficie. Piano tangente ad una superficie (in coordinate parametriche e cartesiane). Superfici orientabili, normale ad una superficie, orientazione indotta da una parametrizzazione, flusso attraverso una superficie. Esempi. Normale ad una superficie, superfici orientabili. Superfici invertibili, orientazione del bordo di una superficie indotta dalla parametrizzazione. Orientazione del bordo di una superficie indotta dall'orientazione della superficie stessa.

Teoremi della divergenza e del rotore: Campi vettoriali, divergenza, rotore, formule di Green per integrali sul piano, teorema della divergenza (con dimostrazione a partire dalle formule di Green) e del rotore nel piano (con dimostrazione) e nello spazio (teorema di Stokes). Sorgenti, pozzi per un campo vettoriale.

Successioni e serie di funzioni. Definizione ed esempi di successioni di funzioni. Convergenza puntuale ed uniforme e loro relazione. Continuità del limite uniforme. Passaggio al limite sotto il segno di integrali. Definizione di serie di funzioni. Serie di potenze: definizioni. Centro, insieme di convergenza e raggio di convergenza (con lemma che ne dimostra l'esistenza). Metodi per il calcolo del raggio di convergenza. Esempi su serie di potenze. Funzione somma di una serie di potenze: regolarità, formule di derivazione ed integrazione. Serie di Taylor, funzioni analitiche e relazioni con le loro derivate. Esempi di funzioni analitiche (con dimostrazione). Serie di Fourier: definizione, somma di una serie di Fourier, esempi.