Programma Dettagliato di Analisi Matematica 2 - Diario

Prof. Francesco Petitta[1]
Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica A.A. 2021–2022

(1) **Successioni e serie di funzioni**
Successioni di funzioni reali di una variabile reale. Convergenza puntuale ed uniforme. Interpretazione Grafica (ε-striscia) Esempi (x^n, $\arctan(nx)$, $n\sin(nx)$, e^{-nx}, ...). Limite puntuale di funzioni continue $\not\Rightarrow$ limite continuo (e.g. x^n in $[0,1]$). Non uniforme $\Rightarrow$ limite di continue (o derivabili) può essere discontinuo (Triangolini di altezza 1). Convergenza puntuale $\not\Rightarrow \int f_n \to \int f$ (Triangolini di altezza n. anche $f_n(x) = n\chi_{\{0,\frac{1}{n}\}}(x)$, su $[0,1]$). Continuità del limite uniforme di funzioni continue (dim.). Passaggio del limite sotto il segno di integrale ($f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \int f_n \to \int f$, con dim.). ($f'_n \rightrightarrows g + f(x_0) \to \lambda) \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ (dim.). Altri Esempi e controesempi.

Serie di funzioni reali di una variabile reale. Convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale. Proprietà: Continuità della serie di funzioni continue. Scambio serie/Integrale. Totale $\Rightarrow$ Uniforme (Criterio di Weierstrass, il viceversa è falso). Serie di potenze e rispettive proprietà. Raggio di convergenza (con dim.). Insieme di convergenza puntuale e uniforme ($|x| < r$, $\forall r < R$....). Serie di Taylor e MacLaurin e funzioni Analitiche. Sviluppi Notevoli e metodo di sostituzione (e.g. sviluppo di $\log(1-x)$, $(1+x)^{-1}$, ...). Applicazioni alle somme di serie numeriche (e.g. $e = \sum \frac{1}{k!}$, $\pi = 4\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$, ...). Derivabilità e integrabilità termine a termine. $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$. $C^\infty \not\Rightarrow$ Analitica ($e^{-x^{-2}}$ per $x > 0$ e zero altrove).

Serie trigonometriche e serie di Fourier per funzioni periodiche. Ortogonalità e spazio $L^2(-\pi,\pi)$. Derivazione formule per i coefficienti della serie. Teorema di convergenza puntuale (alla media sul salto), uniforme e in media quadratica. Identità di Parseval e dintorni (disuguaglianza di Bessel e Lemma di Riemann-Lebesgue). Forme speciali: funzioni pari o dispari, Serie di Fourier in forma complessa. Esempi

(2) **Curve**
Curve piane e nello spazio. Curve parametriche semplici, regolari, chiuse. Curve Cartesiane e Curve di Jordan (orientazione positiva). Vettore tangente e velocità. Riparametrizzazioni e Curve equivalenti (dim. che curve equivalenti hanno la stessa lunghezza). Curve del piano in forma polare (formula della lunghezza in forma polare). Concatenamento di Curve. Curve Regolari a tratti. Ascissa curvilinea (con idea della dim.) e versore tangente.

(3) **Calcolo differenziale per funzioni di più variabili**
Richiami di topologia di $\mathbb{R}^N$. Intorni sferici. Punti interni, punti esterni, punti di frontiera, punti di accumulazione e isolati. Insiemi aperti, chiusi. Richiami di funzioni reali di due o più variabili reali. Linee di livello $L_s = \{(x,y) : f(x,y) = s\}$. Dominio di esistenza. Grafico, Immagine. Limiti ($l < \infty$ e $l = \infty$) e continuità: Definizione e verifica del limite (utilizzo della forma polare). Restrizione ad una curva. Caratterizzazione di limiti tramite restrizioni a curve passanti per (x_0, y_0) (Forma parametrica e forma Cartesiana): non esistenza del limite. Derivabilità parziale. Derivabilità direzionale. Vettore Gradiente. Chain Rule per $F(t) = f(\gamma(t))$(i.e. $F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$). Differenziabilità e Piano tangente. Esempi: Continuità $\not\Rightarrow \exists f_x, f_y$, $\exists f_x, f_y \not\Rightarrow$ continuità, Continuità $+ \exists f_x, f_y \not\Rightarrow$ Differenziabilità. Teorema del differenziale Totale (condizione sufficiente per la differenziabilità).Derivata direzionale di una funzione differenziabile. Interpretazioni geometrica del gradiente: direzione di massima crescita, se $\gamma(t)$ è una curva di livello $\Rightarrow \nabla f \perp \gamma'(t)$ (con dimostrazione). Formula di Taylor di ordine due (cenno di dimostrazione) con temini di ordine inferiore ($+o\|x - x_0\|^2$) o con resto di Lagrange ($+\frac{1}{2}D^2 f(\xi)$).

(4) **Ottimizzazione**
Estremi relativi liberi (Teorema di Fermat) e punti di sella. Richiami su matrici quadrate simmetriche definite, semi-definite e indefinite e loro caratterizzazione (anche tramite autovalori). Studio della natura dei punti critici con la matrice Hessiana. Massimi e mimimi assoluti su insiemi compatti, ovvero chiusi e limitati (definizione), Teorema di Weierstrass. Strategia per l'ottimizzazione su insiemi compatti. Estremi vincolati ad una curva regolare ($\nabla g(x,y) \neq 0$ su Γ) e regolare a tratti (Punti singolari trattati "a parte"). Metodo diretto e Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (Interpretazione geometrica: "Curve di livello tangenti al vincolo"). Esempi. Teorema della funzione implicita (o del Dini) in $\mathbb{R}^2$ (con dimostrazione). Motivazioni (*curve localmente grafici, vincoli regolari, sistemi nonlineari, ...*). Formula della derivata prima e seconda della funzione implicita (con

[1]francesco.petitta@sbai.uniroma1.it

cenno dimostrazione). Generalizzazioni al caso $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^m$ (Sistemi). Esempi: $m = 2, n = 1$, $f(x, y, z)$ definisce implicitamente una curva.

(5) **Integrali doppi e tripli**
Motivazioni e Notazioni. Definizione di integrale doppio secondo Riemann (su rettangoli e su aperti qualsiasi) e interpretazione geometrica (volume con segno). Proprietà di linearità e additività. Formule di riduzione su rettangoli. Domini x-normali (N_x, $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$) e y-normali (N_y, $\delta(y) \leq x \leq \gamma(y)$). Esempi di domini Normali e non-Normali. Formule di riduzione e derivazione della formula per l'Area di un Dominio di $\mathbb{R}^2$. Integrali di funzioni con variabili "separate" su rettangoli (con dim.). Domini Simmetrici (Rispetto agli assi o all' all'origine $T_1(x, y) = (x, -y)$, $T_2(x, y) = (-x, y)$ e $T_3(x, y) = (-x, -y)$) e relativi integrali di funzioni pari o dispari. Teorema del cambiamento di variabile. Coordinate polari e altri esempi notevoli di cambi di variabile. Massa e Baricentro di una lamina piana non omogenea. Solidi di Rotazione e Primo teorema di Guldino per il calcolo del volume di solidi di rotazione. Integrali tripli. Cenni sulla definizione. Massa e Baricentro di una lamina e di un corpo solido. Integrazione su Parallelepipedi e Prima formula di riduzione. Insiemi Normali rispetto ad un piano. Insiemi a sezione normale. Integrazione per fili e per strati (Seconda e Terza formula di Riduzione). Teorema del cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^3$. Coordinate sferiche e cilindriche.

(6) **Integrali curvilinei, campi vettoriali e forme differenziali**
Integrali curvilinei di funzioni continue (di Prima Specie). Baricentro di una curva. Campi Vettoriali: Definizione ed Esempi. Integrali curvilinei di campi vettoriali (di Seconda Specie). Lavoro di un campo. Energia Cinetica di un campo di Forze. Campi conservativi e irrotazionali. Calcolo del Potenziale di un campo conservativo. Caratterizzazione di campi conservativi attraverso integrali su curve (con dimostrazione). Domini connessi (per archi. $\forall P, Q \in A$ esiste γ....) e semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$ ("...ogni curva chiusa contenuta in A è bordo di un insieme tutto contenuto in A") e in $\mathbb{R}^3$ ("...ogni curva chiusa contenuta in A si pu'o restringere ad un punto con continuità restando in A"). Un campo Conservativo è Irrotazionale (con dimostrazione). Condizione necessarie e sufficienti per la conservatività di un campo. Il linguaggio delle Forme Differenziali (Forme chiuse, Esatte, Circuitazione, ...). Corrispondenza biunivoca Campi vettoriali $\leftrightarrow$ Forme differenziali. Domini regolari del piano (Unione finita di domini normali) e Curve Orientate (versore normale $\hat{n}$ assegnato). Orientazione positiva di curve chiuse. Formule di Gauss-Green in dimensione 2 (aka Stokes in Dimensione 2 - con dim. nel caso di domini normali rispetto ad entrambi gli assi). Calcolo delle aree tramite Gauss-Green. Flusso di un campo attraverso una curva. Teorema della Divergenza in $\mathbb{R}^2$ (con dim.).

(7) **Integrali superficiali, Teorema della Divergenza e Formula di Stokes**
Superfici cartesiane ($g(x, y, z) = 0$ o $z = f(x, y)$), superficie regolare se $\nabla g(x, y, z) \neq 0$), parametriche ($\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$), e loro relazioni. Esempi: sfera di raggio R, superficie laterale di un cilindro di altezza h, ecc... . Superfici di Rotazione e loro rappresentazione parametrica (Esempio: Cono). Vettore normale e Piano Tangente ad una superficie. Superficie Parametrica Regolare (con o senza bordo). Curve e vettori tangenti coordinati ($\sigma(u, v_0), \sigma(u_0, v), \sigma_u(u_0, v_0), \sigma_v(u_0, v_0)$). Vettore ($\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)$) e versore ($\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)/\|\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)\|$) normale e Piano Tangente in forma parametrica ($\sigma(u_0, v_0) + u\sigma_u(u_0, v_0) + v\sigma_v(u_0, v_0)$). Integrali Superficiali. Secondo Teorema di Guldino per l'Area di Superfici di Rotazione (con dim.): Area(Σ)= $2\pi x_G L(\gamma)$. Superfici Orientate ($\exists$ versore normale $\hat{n}$). Flusso di un campo attraverso una superficie regolare. Flusso attraverso superfici chiuse (orientazione canonica). Teorema della divergenza. Orientazione indotta del bordo da una superficie orientata con bordo. Formula di Stokes.

Bibliografia Essenziale:

- M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, Analisi Matematica, Ed. McGraw-Hill
- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Lezioni di Analisi Matematica due, Zanichelli
- M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 2. Ed. Zanichelli
- M. Bramanti, Esercitazioni di Analisi Matematica 2. Ed. Esculapio
- G. Catino, F. Punzo, Esercizi svolti di Analisi Matematica e Geometria 2, Amazon Books
- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Elementi di Analisi Matematica due, Liguori Editore
- P. Marcellini, C. Sbordone, Esercitazioni di Analisi Matematica Due, Ed. Zanichelli
- M. Amar, A. Bersani, Analisi Matematica 2 - Esercizi e Richiami di Teoria, Ed. La Dotta
- `www.google.com` $\supseteq$ `www.wikipedia.com`