Metodi Numerici con elementi di Programmazione

(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Integrazione numerica

Formule di quadratura

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://ingaero.uniroma1.it/

nella pagina dedicata al corso Metodi Numerici con elementi di Programmazione

Integrazione numerica

Esempio 1

L'intensità H del campo magnetico in un punto x indotto dalla corrente di intensità I che scorre su un anello cilindrico di raggio r si esprime come segue

$$H(x) = \frac{4Ir}{r^2 - x^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 sin^2(\theta)} d\theta$$

x è la distanza dal centro dell'anello in cui si misura il campo e risulta $0 \leq x \leq r$. Supponendo noti r, I e x, l'integrale può essere risolto o usando opportuni sviluppi in serie oppure usando metodi numerici. L'integrale rientra nella famiglia degli integrali ellittici, riferiti al calcolo della lunghezza di un arco di ellisse.

Esempio 2

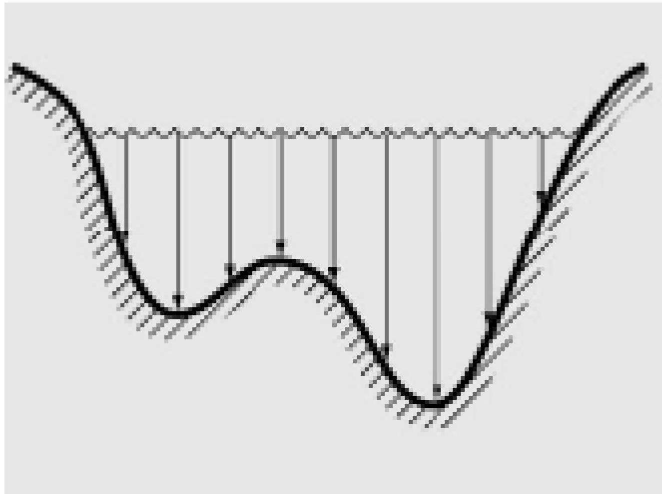
Una macchina da corsa percorre un giro di pista in 84 secondi. La velocità della macchina viene misurata con un radar ogni 6 secondi per tutta la durata del percorso. I valori misurati sono riportati in tabella:

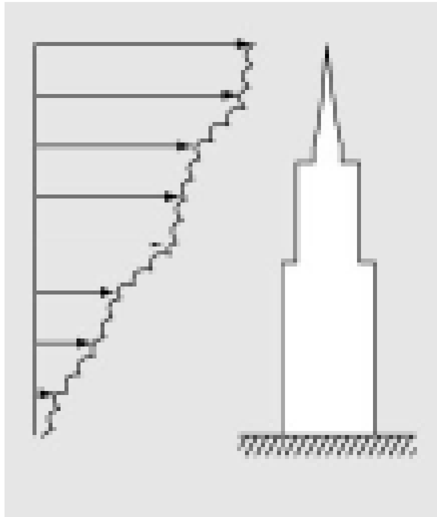
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t_i	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
v_i	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

Quanto è lunga la pista?

Traccia della soluzione. La lunghezza della strada percorsa da una macchina che si muove a velocità $v(t)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è data da $L = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$.

Altri esempi





river cross-section wind blow on a rocket

Integrazione numerica

Problema: approssimare **numericamente** integrali definiti

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

L'intervallo di integrazione $[a, b]$ può essere anche illimitato.

Si ricorre all'**integrazione numerica** quando:

- la primitiva di f **non** può essere espressa in **forma chiusa**, ad esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x) = e^{-x^2}$;
- l'**espressione analitica** di $I(f)$ è **complicata** da calcolare;
- i valori di f sono noti solo in alcuni **nodi** x_i, $i = 0, \dots, n$, ad esempio quando sono il risultato di misure sperimentali.

Soluzione: **approssimare** la funzione integranda $f(x)$ con il **polinomio interpolatore** $p_n(x)$, costruito su un insieme opportuno di **nodi** x_i, $i = 0, \dots, n$; quindi approssimare $I(f)$ con $I(p_n)$.

Formule di quadratura interpolatorie

Formula di interpolazione di Lagrange:

$$f(x) = p_n^*(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) + E_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) + E_n(x) \right]\ dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\ dx + \int_a^b E_n(x)\ dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, c_i + R_n(f) = \underbrace{S_n(f)} + \underbrace{R_n(f)}$$

Parte approssimante

Coefficienti: $c_i = \int_a^b l_i(x)\ dx$

Errore di troncamento
o **resto**

Se consideriamo anche gli **errori** ε_i sui dati si ha

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) + \varepsilon_i)\, l_i(x) + E_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ dx \;= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\ dx + \int_a^b E_n(x)\ dx + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \int_a^b l_i(x)\ dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, c_i + \int_a^b E_n(x)\ dx + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i\, c_i = S_n(f) + R_n(f) + \underbrace{R_n^*(f)}$$

Errore di propagazione

$$\Rightarrow I(f) = S_n(f) + R_n(f) + R_n^*(f)$$

$$\begin{cases} S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, c_i & \textbf{Parte approssimante} \\[2ex] c_i = \int_a^b l_i(x)\ dx & \textbf{Coefficienti} \\[2ex] R_n(f) = \int_a^b E_n(x)\ dx = \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))\ dx & \textbf{Resto} \\[2ex] R_n^*(f) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i\, c_i & \textbf{Errore di propagazione} \end{cases}$$

Grado di precisione

L'**interpolazione** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$, quindi $E_n(x) = 0 \Longrightarrow R_n(q_m) = 0$, cioè la **formula di quadratura** è **esatta** per ogni polinomio $q_m(x)$ di grado $m \leq n$.

Definizione. Si dice che una formula di quadratura ha **grado di precisione** ν se è **esatta** per **tutti** i polinomi $q_m(x)$ di grado $m \leq \nu$, cioè $R_n(q_m) = I(q_m) - S_n(q_m) = 0$, $m \leq \nu$. In particolare, la formula di quadratura è **esatta** per i **monomi** x^k, $k = 0, 1, \ldots, \nu$.

- Una formula di quadratura **interpolatoria** a $n+1$ **nodi** ha grado di precisione **almeno** $n \geq 0$.

$$\Downarrow$$

- Le formule di quadratura **interpolatorie** sono **esatte** almeno per le funzioni **costanti**. In particolare, se si pone $f(x) = 1$, si ottiene

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} c_i = b - a}$$

Consideriamo il polinomio di grado $2n+2$

$$\mathbf{\Pi}(x) = \left(\pi_n(x)\right)^2 = (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

dove x_i, $i=0,\ldots,n$, sono i **nodi** della formula di quadratura.

- $I(\mathbf{\Pi}) = \int_a^b \mathbf{\Pi}(x)\ dx > 0$

- $I(\mathbf{\Pi}) = S_n(\mathbf{\Pi}) + R_n(\mathbf{\Pi}) = \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\mathbf{\Pi}(x_i)}_{=0} + R_n(\mathbf{\Pi}) = R_n(\mathbf{\Pi})$

$\Longrightarrow$ $R_n(\mathbf{\Pi}) > 0$: esiste **almeno un polinomio** di grado $2n+2$ per il quale le formule di quadratura interpolatorie **non** sono **esatte**, quindi $\nu < 2n+2$.

$\Longrightarrow$ Per le **formule interpolatorie** si ha

$$\boxed{n \leq \nu \leq\ 2n+1} \qquad\qquad n \geq 0$$

Esercizio

Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{1}{6} f(-1) + Af\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + Bf\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{6} f(1) + R(f),$$

1) determinare A e B in modo che la formula abbia **grado di precisione** non inferiore a 2;

2) dimostrare che la formula di quadratura ottenuta ha **grado di precisione** 5;

3) dare una maggiorazione dell'**errore di propagazione** se i dati sono affetti da errori ϵ_i con $|\epsilon_i| \leq 10^{-4}$.

Traccia della soluzione

1) I coefficienti della formula di quadratura si determinano con il **metodo dei coefficienti indeterminati**, cioé imponendo che la formula sia **esatta** per $f(x) = x^k$, $0 \le k \le 2$. Si ottiene il sistema

$$
\begin{array}{ll}
k = 0, f(x) = 1 \quad \Rightarrow & \\
k = 1, f(x) = x \quad \Rightarrow & \\
k = 2, f(x) = x^2 \quad \Rightarrow &
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{6}(1) + A(1) + B(1) + \frac{1}{6}(1) = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\
\frac{1}{6}(-1) + A\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + B\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{6}(1) = \int_{-1}^{1} x \; dx = 0 \\
\frac{1}{6}(1) + A\left(\frac{1}{5}\right) + B\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{6}(1) = \int_{-1}^{1} x^2 \; dx = \frac{2}{3}
\end{array}
\right.
$$

$$\Downarrow$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A + B = \frac{5}{3} \\
-\frac{A}{\sqrt{5}} + \frac{B}{\sqrt{5}} = 0 \\
\frac{A}{5} + \frac{B}{5} = \frac{1}{3}
\end{array}
\right.
\Rightarrow A = B = \frac{5}{6} \Rightarrow
$$

Formula di quadratura

$$
\int_{-1}^{1} f(x) \; dx = \frac{1}{6} f(-1) + \frac{5}{6} f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) +
+ \frac{5}{6} f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{6} f(1) + R(f)
$$

2) A causa della **simmetria** dei nodi e dei coeffcienti, la formula è esatta per tutti i monomi di grado dispari x^{2n+1}, infatti

$$\frac{1}{6}(-1)^{2n+1}+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n+1}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2n+1}+\frac{1}{6}(1)^{2n+1}=\int_{-1}^{1}x^{2n+1}\,dx=0$$

La formula ha grado di precisione 5 se è **esatta** per **tutti i monomi** fino al grado 5. Per la simmetria la formula è esatta per x^3 e x^5; per x^4 si ha

$$\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\frac{2}{5}=\frac{1}{6}(-1)^4+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^4+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^4+\frac{1}{6}(1)^4$$

Invece per x^6 si ha

$$\int_{-1}^{1}x^6\,dx=\frac{2}{7}\neq\frac{1}{6}(-1)^6+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6+\frac{1}{6}(1)^6=\frac{26}{75}$$

$\Rightarrow$ La formula ha grado di precisione **esattamente** 5.

3) L'errore di propagazione è dato da

$$R^* = \sum_{i=0}^{3} \epsilon_i c_i = \frac{1}{6}\epsilon_0 + \frac{5}{6}\epsilon_1 + \frac{5}{6}\epsilon_2 + \frac{1}{6}\epsilon_3$$

$$\Rightarrow |R^*| \leq \epsilon \sum_{i=0}^{3} |c_i| = 2\epsilon = 0.2 \cdot 10^{-3}$$

Nota. Poiché i coefficienti sono **tutti positivi** si ha

$$\sum_{i=0}^{3} |c_i| = \sum_{i=0}^{3} c_i = b - a = 2$$

Scelta dei nodi nelle formule interpolatorie

Differenti **distribuzioni di nodi** danno origine a differenti formule di quadratura con diverso grado di precisione.

- **Formule di Newton-Cotes**

Nodi equispaziati: $x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad h = \dfrac{b-a}{n}$

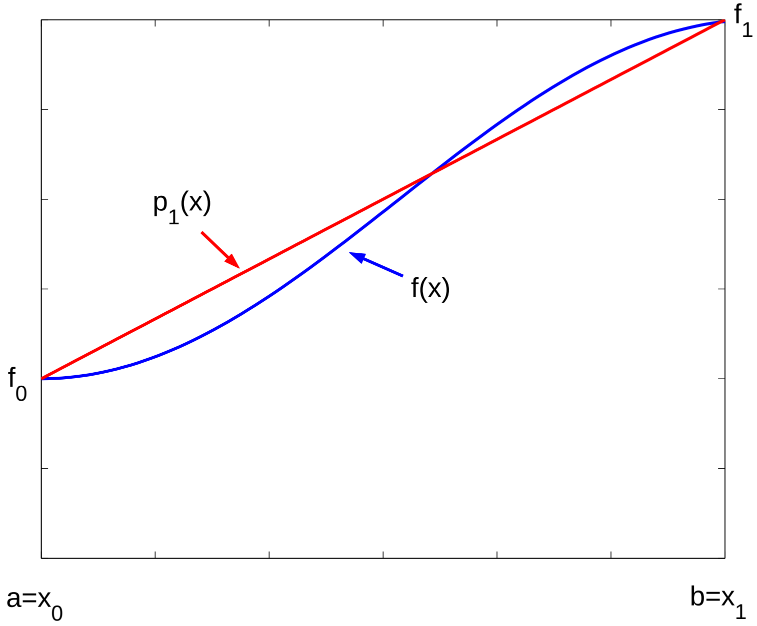
Grado di precisione: $\begin{cases} \nu = n, & n+1 \ \textbf{pari} \\ \nu = n+1, & n+1 \ \textbf{dispari} \end{cases}$

- **Formule gaussiane**

Nodi gaussiani: **zeri** di polinomi ortogonali, ad esempio i **nodi di Chebyshev**; non sono equispaziati e sono interni all'intervallo $[a, b]$.

Grado di precisione: $\nu = 2n + 1$ (massimo)

Formula del trapezio: $n+1=2$, $\nu=1$, $f \in C^2[a,b]$



Si approssima $f(x)$ con un **polinomio interpolatore** di grado 1 che passa per i punti:

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \frac{\pi_1(x)}{2!} f''(\xi(x)) = \\ &= f_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} + \frac{1}{2}(x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

Parte approssimante:

$$S_1(f) = f_0 \int_a^b \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\, dx + f_1 \int_a^b \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} f_0 (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} f_1 (x_1 - x_0) = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)(b - a) =$$

$$= \frac{1}{2}(f_0 + f_1) h$$

Resto:

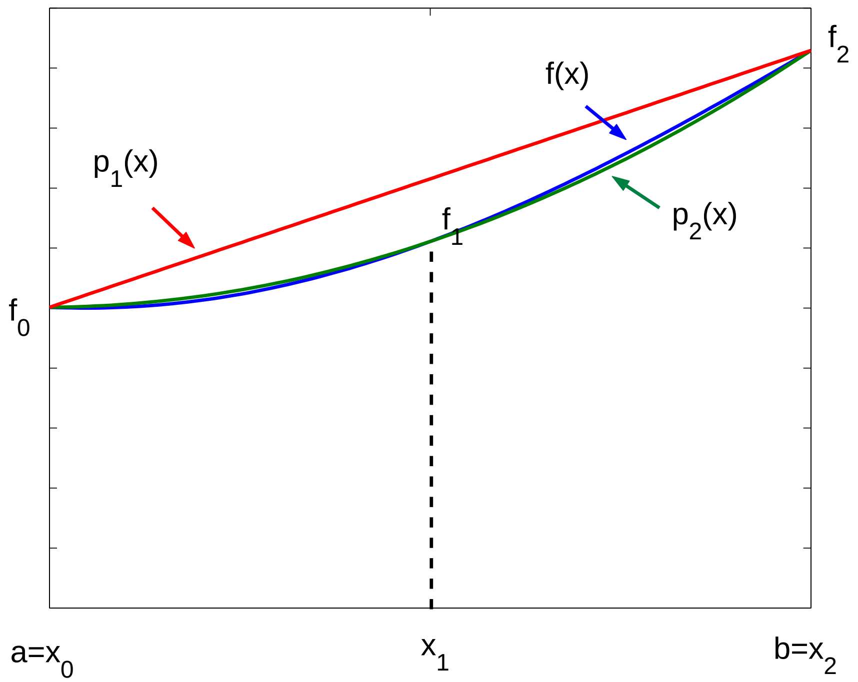
$$R_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)}_{\textit{segno costante in } (a,b)}\ f''(\xi(x))\ dx \underbrace{=}_{\downarrow} -\frac{1}{12} h^3 f''(\tau) \quad \tau \in [a, b]$$

Teorema
della media

Formula di Cavalieri-Simpson

$$n + 1 = 3,\ \nu = 3,\ f \in C^4[a, b]$$

Si approssima $f(x)$ con una **parabola** (polinomio di secondo grado) che passa per i punti: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$.



Parte approssimante: $S_2(f) = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

Resto: $R_2(f) = -\dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau) \qquad \tau \in [a, b]$

Infatti

Parte approssimante:

$$S_2(f) = f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx +$$

$$+ f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx$$

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{(x_2-x_0)}{2}$$

Resto:

$$R_2(f) = \frac{1}{6} \int_{x_0}^{x_2} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{\textit{cambia segno in } (a,b)} f'''(\xi(x))\; dx$$

In questo caso prima di applicare il teorema della media è necessario integrare per parti

Formula dei 3/8

$$n + 1 = 4,\ \nu = 3,\ f \in C^4[a, b]$$

Si approssima $f(x)$ con un **polinomio di terzo grado** che passa per i punti: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$.

Parte approssimante: $S_3(f) = \dfrac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$

Resto: $R_3(f) = -\dfrac{3h^5}{80} f^{(4)}(\tau) \qquad \tau \in [a, b]$

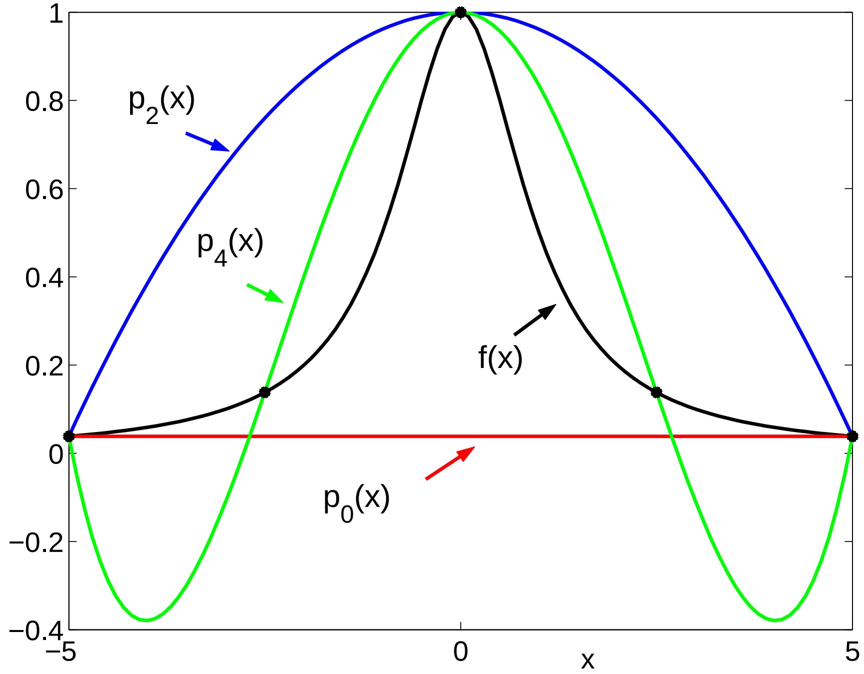
Convergenza delle formule di quadratura

Convergenza: $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f) \iff \lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0}$

• Al **crescere di n** il polinomio interpolatore potrebbe non convergere $\Rightarrow$ anche la formula di quadratura potrebbe fornire **risultati inaccurati**.

Fenomeno di Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in [-5, 5]$$



$\Longrightarrow$ Le formule di quadratura interpolatorie **convergono** in tutti quei casi in cui **converge il polinomio interpolatore**.

Teorema. Sia $f \in C[a,b]$, $[a,b]$ limitato, sia $\{S_n(f)\}$ una **successione** di **formule di quadratura interpolatorie**

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, f(x_i) \quad \text{tale che} \quad \sum_{i=0}^{n} |c_i| \le M \qquad \forall n,$$

allora $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f)$.

Nota 1. Per le formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** si ha

$$\sum_{i=0}^{n} |c_i| = \sum_{i=0}^{n} c_i = b - a$$

per cui l'ipotesi del **Teorema** è soddisfatta con $M = b - a$.

$$\Downarrow$$

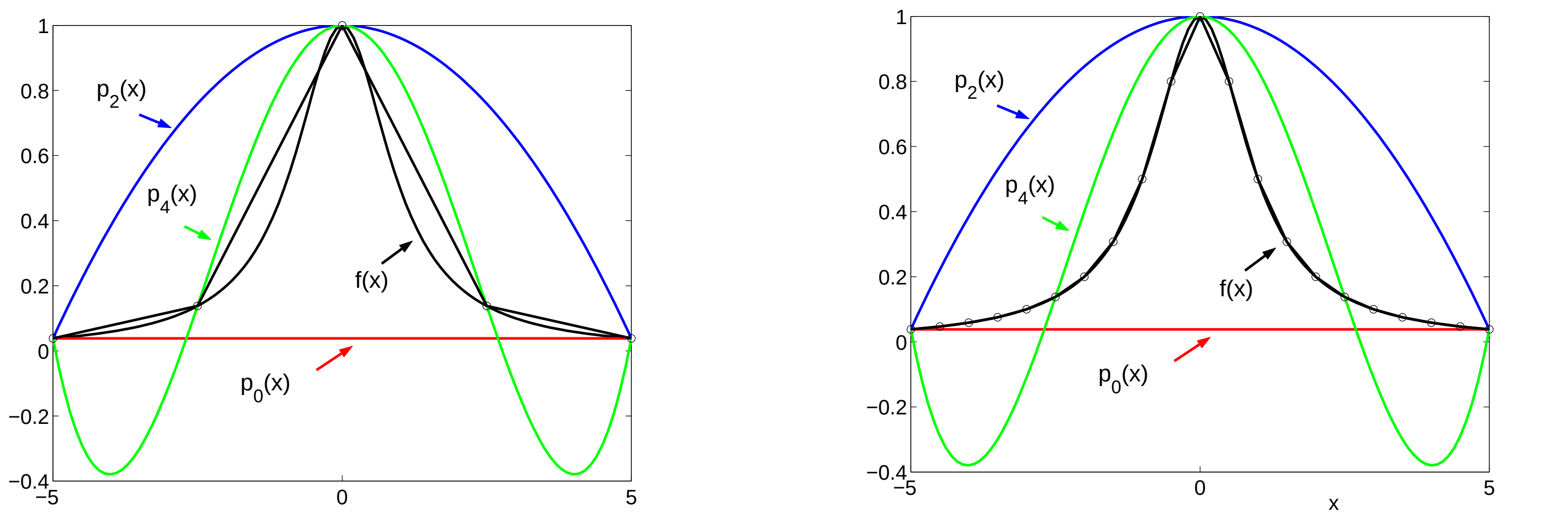
Ogni **successione** di formule di quadratura interpolatorie a **coefficienti positivi** è **convergente**.

Nota 2. I coefficienti delle **formule di Newton-Cotes** sono **tutti positivi** se $n \le 7$, mentre sono sia **positivi** che **negativi** per $n > 7$. I coefficienti delle **formule gaussiane** sono **tutti positivi** per ogni valore di n.

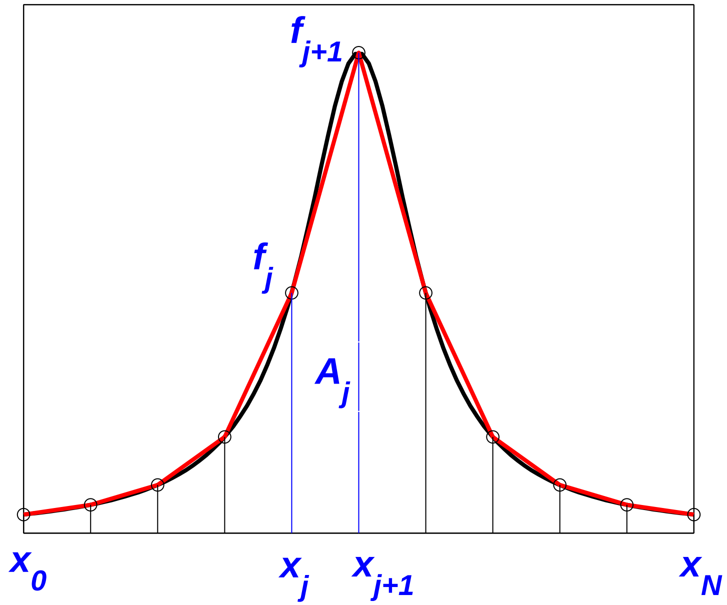
Formule di Newton-Cotes generalizzate

- Per $n > 7$ i coefficienti c_i delle formule di Newton-Cotes hanno segni sia **positivi** che **negativi** $\rightarrow$ oltre a non essere garantita la convergenza, si può avere un'**amplificazione** degli errori sui dati, e quindi un'**instabilità numerica**.

- Per evitare l'uso di formule di Newton-Cotes di **grado elevato**, quando si dispone di un numero **elevato** di dati $\{x_i, f_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, si divide l'intervallo di integrazione in n **sottointervalli** e si utilizza in ciascun sottointervallo una formula di Newton-Cotes di **grado basso** (in genere di grado 1 o 2).



Formula dei trapezi

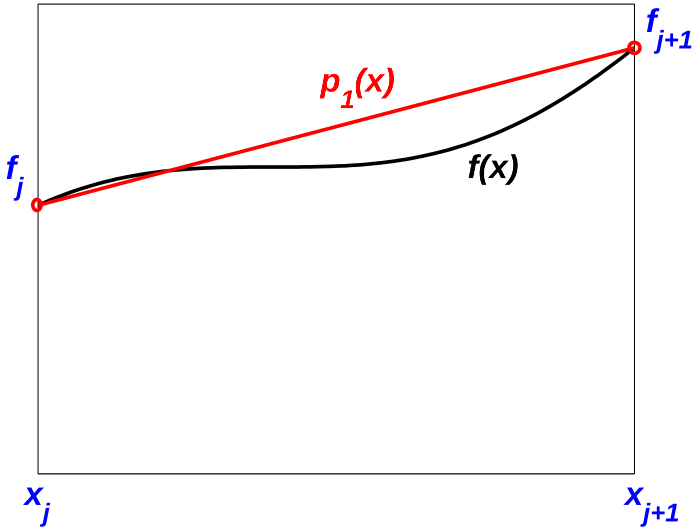


L'integrale $I(f)$ viene **approssimato** con la somma delle aree dei **trapezi** A_j.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \sum_{j=0}^{n-1} A_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h}{2} \left(f_j + f_{j+1} \right)$$

Formula del trapezio: $n = 1,\ \nu = 1,\ f \in C^2[a,b]$



Si approssima **localmente** $f(x)$ con un **polinomio interpolatore** di grado $n = 1$ che passa per i punti:

$$(x_j, f_j), (x_{j+1}, f_{j+1})$$

$$f(x) = f_j\, l_j(x) + f_{j+1}\, l_{j+1}(x) + \frac{\pi_1(x)}{2!} f''(\xi_j(x)) =$$

$$= f_j \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} + f_{j+1} \frac{(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_j)} + \frac{1}{2}(x - x_j)(x - x_{j+1}) f''(\xi_j(x))$$

$$\xi_j(x) \in [x_j, x_{j+1}]$$

Parte approssimante:

$$S_1(f) \;= f_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})}\, dx + f_{j+1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_j)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} f_j\,(x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2} f_{j+1}(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1})(x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \frac{h}{2}\,(f_j + f_{j+1})$$

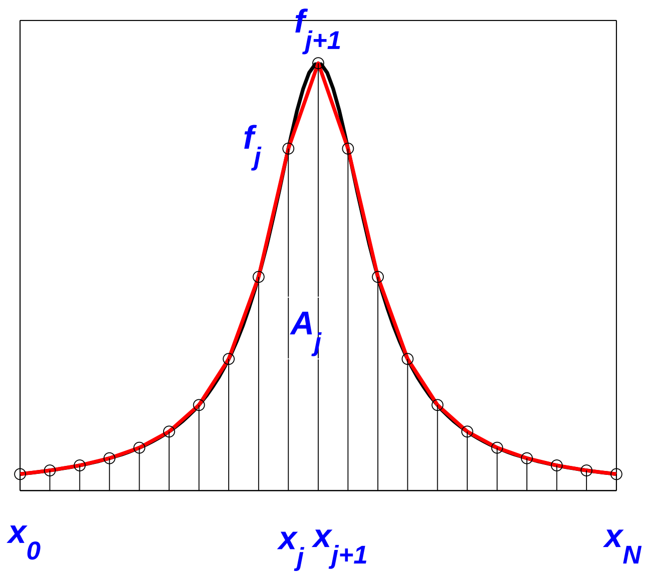
Resto:

$$R_1(f) = \frac{1}{2}\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)(x - x_{j+1}) f''(\xi_j(x))\; dx \underbrace{=}_{\downarrow} -\frac{1}{12} h^3 f''(\tau_j)$$

Teorema
della media

$\tau_j \in [x_j, x_{j+1}]$

Formula dei trapezi



In ogni **sottointervallo** $[x_j, x_j+1]$, $j = 0, \ldots, n-1$, si applica la **formula del trapezio** con $h = \dfrac{b-a}{n}$.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx =$$

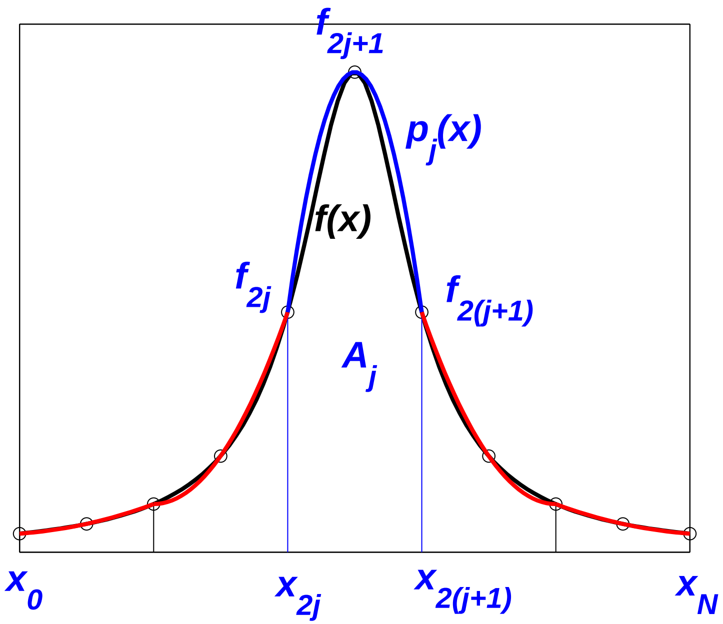
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{h^3}{12}\right) f''(\tau_j) \qquad \tau_j \in [x_j, x_j+1]$$

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{h^3}{12}\right) f''(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{2}(f_0 + f_1 + f_1 + f_2 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-2} + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n) - \left(\frac{h^3}{12}\right) \sum_{j=0}^{n-1} f''(\tau_j) = \\
&= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} f_j + f_n\right) - \left(\frac{h^3}{12}\right) n f''(\tau) \qquad \tau \in [a,b]
\end{aligned}
$$

Formula dei trapezi: $\begin{cases} T_n(f) = \dfrac{h}{2}\left(f_0 + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} f_j + f_n\right) \\ R_n^T(f) = -\left(\dfrac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \qquad \tau \in [a,b] \end{cases}$

Grado di precisione: $\nu = 1$

Formula delle parabole



L'integrale $I(f)$ viene **approssimato** con la somma delle aree al di sotto della **parabola** $p_j(x)$.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x)\,dx \approx$$

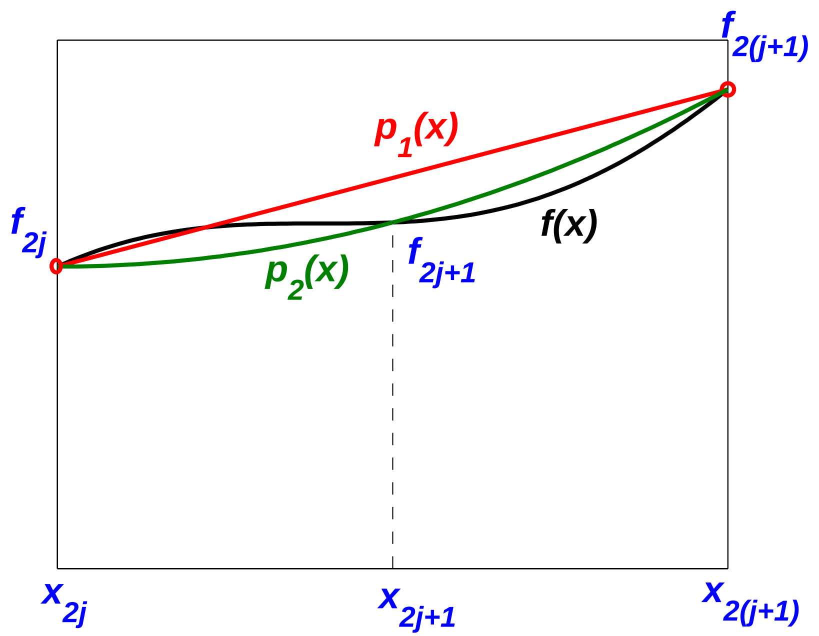
$$\approx \sum_{j=0}^{n/2-1} A_j = \sum_{j=0}^{n/2-1} \frac{h}{3}\left(f_{2j} + 4\,f_{2j+1} + f_{2(j+1)}\right)$$

Formula di Cavalieri-Simpson

$$n = 2,\ \nu = 3,\ f \in C^4[a,b]$$

Si approssima **localmente** $f(x)$ con una **parabola** (polinomio di secondo grado) che passa per i punti:

$$(x_{2j}, f_{2j}), (x_{2j+1}, f_{2j+1}), (x_{2(j+1)}, f_{2(j+1)})$$



$$
\begin{aligned}
f(x) \;&= f_{2j}\, l_{2j}(x) + f_{2j+1}\, l_{2j+1}(x) + f_{2(j+1)}\, l_{2(j+1)}(x) + \frac{\pi_2(x)}{3!} f^{(3)}(\xi_j(x)) = \\
&= f_{2j}\, \frac{(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)})}{(x_{2j} - x_{2j+1})(x_{2j} - x_{2(j+1)})} + \\
&+ f_{2j+1}\, \frac{(x - x_{2j})(x - x_{2(j+1)})}{(x_{2j+1} - x_{2j})(x_{2j+1} - x_{2(j+1)})} + \\
&+ f_{2(j+1)}\, \frac{(x - x_{2j})(x - x_{2j+1})}{(x_{2(j+1)} - x_{2j})(x_{2(j+1)} - x_{2j+1})} + \\
&+ \frac{1}{6}\, (x - x_{2j})(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)})\, f^{(3)}(\xi_j(x))
\end{aligned}
$$

$$\xi_j(x) \in [x_{2j}, x_{2(j+1)}]$$

Parte approssimante:

$$
\begin{aligned}
S_2(f) &= f_{2j}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} l_{2j}(x)\,dx \;+\; f_{2j+1}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} l_{2j+1}(x)\,dx \;+ \\
&+\; f_{2(j+1)}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} l_{2(j+1)}(x)\,dx = \\
&= f_{2j}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} \frac{(x-x_{2j+1})(x-x_{2(j+1)})}{(x_{2j}-x_{2j+1})(x_{2j}-x_{2(j+1)})}\,dx \;+ \\
&+ f_{2j+1}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} \frac{(x-x_{2j})(x-x_{2(j+1)})}{(x_{2j+1}-x_{2j})(x_{2j+1}-x_{2(j+1)})}\,dx \;+ \\
&+ f_{2(j+1)}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} \frac{(x-x_{2j})(x-x_{2j+1})}{(x_{2(j+1)}-x_{2j})(x_{2(j+1)}-x_{2j+1})}\,dx \;= \\
&= \frac{h}{3}\left(f_{2j}+4f_{2j+1}+f_{2(j+1)}\right)
\end{aligned}
$$

Resto:

$$R_2(f) = \frac{1}{6}\int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} (x - x_{2j})(x - x_{2j+1})(x - x_{2(j+1)}) f^{(3)}(\xi_j(x))\, dx =$$

$$= \quad -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau_j) \qquad \tau_j \in [x_{2j}, x_{2(j+1)}]$$

Formula delle parabole

In ogni **sottointervallo** $[x_{2j}, x_{2(j+1)}]$, $j = 0, 1, \dots, n/2-1$, si applica la **formula di Cavalieri-Simpson** con $h = \dfrac{b-a}{n}$.

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x)\,dx = \\
&= \sum_{j=0}^{n/2-1} \frac{h}{3}\left(f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}\right) + \sum_{j=0}^{n/2-1}\left(-\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tau_j)
\end{aligned}
$$

$$\tau_j \in [x_j, x_j + 1]$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n/2-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2(j+1)}} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n/2-1} \frac{h}{3}\left(f_{2j} + 4f_{2j+1} + f_{2(j+1)}\right) + \sum_{j=0}^{n/2-1} \left(-\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tau_j) =$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2 + f_2 + 4f_3 + f_4 + f_4 + 4f_5 + f_6 + \cdots + f_{n-2} + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) +$$

$$-\left(\frac{h^5}{90}\right) \sum_{j=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\tau_j) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{j=0}^{n/2-1} f_{2j+1} + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f_{2j} + f_n\right) - \left(\frac{h^5}{90}\right)\frac{n}{2} f^{(4)}(\tau)$$

Formula delle parabole:

$$\begin{cases} P_n(f) = \dfrac{h}{3}\left(f_0 + 4\displaystyle\sum_{j=0}^{n/2-1} f_{2j+1} + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f_{2j} + f_n\right) \\[2ex] R_n^P(f) = -\left(\dfrac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau) \qquad \tau \in [a,b] \end{cases}$$

Grado di precisione: $\nu = 3$

Nota. Per poter usare la formula delle parabole il **numero di nodi** $n+1$ deve essere **dispari**.

Convergenza delle formule dei trapezi e delle parabole

Formula dei trapezi:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} T_n(f) = I(f) \iff \lim_{n\to\infty} R_n^T(f) = 0}$$

Se $f \in C^{(2)}[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} R_n^T(f) \underbrace{=}_{h=\frac{b-a}{n}} \lim_{h\to 0} R_n^T(f) = \lim_{h\to 0} \left[-\left(\frac{b-a}{12}\right)\right] h^2 f''(\tau) = 0$$

Formula delle parabole:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n(f) = I(f) \iff \lim_{n\to\infty} R_n^P(f) = 0}$$

Se $f \in C^{(4)}[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} R_n^P(f) \underbrace{=}_{h=\frac{b-a}{n}} \lim_{h\to 0} R_n^P(f) = \lim_{h\to 0} \left[-\left(\frac{b-a}{180}\right)\right] h^4 f^{(4)}(\tau) = 0$$

Esempio 2 (inizio slide)

Si può approssimare la lunghezza della pista con una **formula di quadratura generalizzata**.

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{84}{14} = 6$

Formula dei trapezi: $L \approx 3 \left(v_0 + 2 \sum_{i=1}^{13} v_i + v_{14} \right) = 9855$

Formula delle parabole: $L \approx 2 \left(v_0 + 4 \sum_{i=0}^{6} v_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^{6} v_{2i} + v_{15} \right) =$ 9858

Errore di propagazione

Assumendo che per l'**errore sui dati** valga la limitazione $|\varepsilon_i| \le \varepsilon = 0.5$, per l'**errore di propagazione** si ottiene la maggiorazione:

$$|R_n^*(f)| = |\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \, c_i| \le \sum_{i=0}^{n} |\varepsilon_i| \, |c_i| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |c_i|$$

Poiché entrambe le formule di quadratura hanno **coefficienti** c_i **positivi** si ha

$$|R_n^*(f)| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |c_i| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n} c_i = \varepsilon \, (b-a) = 0.5 \cdot 84 = 42$$

Esercizio

Si stimi il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

sapendo che la funzione f assume i valori riportati in tabella

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
f(x)	1.5000	2.0000	2.0000	1.6364	1.2500	0.9565

Soluzione Poichè il **numero di punti è pari**, è necessario o applicare la formula dei trapezi, oppure suddividere l'intervallo opportunamente in due sotto-intervalli in cui applicare due formule di quadrature distinte ma possibilmente aventi precisione comparabile.

Per esempio, scegliendo la formula di Cavalieri-Simpson per i primi tre nodi e la formula dei 3/8 per i successivi si ha

$$\int_0^{5/2} f(x)dx = I_1 + I_2 = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{5/2} f(x)dx$$

con

$$I_1 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{1}{6}(1.5 + 4 \cdot 2 + 2) = \frac{11.5}{6} = 1.9167$$

$$I_2 = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) = \frac{3}{16}(2+3\cdot 1.6364+3\cdot 1.25+0.9565) = 4.3559$$

e quindi

$$\int_0^{5/2} f(x)dx \approx 1.9167 + 4.3559 = 6.2726$$

mentre

$$R(f) = R_1(f) + R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{3h^5}{80} f^{(IV)}(\xi_2), \quad \xi_1 \in (0,1),\ \xi_2 \in (1, 2.5)$$

Nota: Confrontare l'approssimazione del valore dell'integrale con quella ottenura usando la formula dei trapezi.

Integrazione su intervalli illimitati

Si determini

$$\int_0^{+\infty} cos^2(x)e^{-x}dx$$

a meno di un errore inferiore a 10^{-3}.

Soluzione

$f(x) = cos^2(x)e^{-x}$ è integrabile su $[0, +\infty)$, infatti

$$0 < \int_0^{+\infty} cos^2(x)e^{-x}dx < \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 < +\infty$$

Per poter applicare la formula dei trapezi, si scrive

$$I(f) = \int_0^{+\infty} cos^2(x)e^{-x}dx = \int_0^{\beta} cos^2(x)e^{-x}dx + \int_{\beta}^{+\infty} cos^2(x)e^{-x}dx$$

e si cerca $\beta > 0$ tale che

$$\int_{\beta}^{+\infty} cos^2(x)e^{-x}dx < 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

In questo modo la formula dei trapezi si applica all'integrale

$$\int_0^{\beta} cos^2(x)e^{-x}dx$$

Si osserva che

$$\int_{\beta}^{+\infty} cos^2(x)e^{-x}dx < \int_{\beta}^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-\beta} \leq 0.5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \geq -ln(0.5 \cdot 10^{-3}) \approx 7.601.$$

Scegliendo il valore di β più piccolo, cioè $\beta = -ln(0.5 \cdot 10^{-3})$, si vuole determinare in quanti intervalli di uguale lunghezza è necessario suddividere l'intervallo $[0, \beta]$ affinchè la formula dei trapezi produca una stima dell'integrale della funzione in questo intervallo con un errore inferiore a $0.5 \cdot 10^{-3}$.

A tal fine consideriamo l'espressione dell'errore di troncamento della formula dei trapezi, cioè

$$R_n^T(f) = -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \qquad \tau \in [a, b]$$

e richiediamo

$$|R_n^T(f)| < 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Si osserva che $b - a = \beta$, mentre

$$|R_n^T(f)| = \left(\frac{\beta}{12}\right) h^2 |f''(\tau)| \leq \left(\frac{\beta}{12}\right) h^2 \max_{x \in [0,\beta]} |f''(x)|.$$

Poichè

$$f''(x) = e^{-x}(2sin(2x) + cos^2(x) - 2cos(2x))$$

allora

$$max_{x \in [0,\, \beta]} |f''(x)| \leq 1.15$$

Da cui

$$|R_n^T(f)| < 0.5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{12}\right) h^2 \max_{x \in [0,\beta]} |f''(x)| < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

cioè

$$h^2 \leq \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\max_{x \in [0,\beta]} |f''(x)|} \frac{12}{\beta} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{1.15} \frac{12}{-ln(0.5 \cdot 10^{-3})} = 6.86 \cdot 10^{-4}$$

e quindi

$$h \leq 0.0262.$$

Se $n+1$ è il numero di punti da usare nella formula dei trapezi, allora

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\beta}{n},$$

cioè

$$n \geq \frac{-ln(0.5 \cdot 10^{-3})}{0.0262} = 290.11$$

e quindi, essendo n un numero intero,

$$n \geq 291.$$

Quindi, sono necessari almeno **292** punti nella formula dei trapezi per raggiungere la precisione richiesta.

Nota: Ripetere l'esercizio precedente usando la formula delle parabole e confrontare i risultati.

Esercizio

Scrivere la funzione Matlab **trapezi.m** che riceva come parametri di input i valori fi di una funzione valutati su una griglia di punti equispaziati nell'intervallo $[a, b]$ e approssimi l'integrale della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ usando la formula dei trapezi. Usare la funzione per calcolare l'integrale della funzione dell'esercizio precedente e confrontare i risultati con lo output della funzione **trapz.m** predefinita di Matlab.

```
function [int_value] = trapezi(fi,a,b)
%[int_value] = trapezi(fi,a,b)
% valuta l'integrale di una funzione f nell'intervallo [a,b]
% usando la formula dei trapezi, conoscendo il valore di f in punti
% equidistanti nell'intervallo [a,b]
%
% INPUT
%
% fi = valore della funzione in punti equidistanti dell'intervallo [a,b]
% a = estremo inferiore dell'intervallo di integrazione
% b = estremo superiore dell'intervallo di integrazione
%
% int_value = approssimazione dell'integrale di f in [a,b]

N = length(fi); % numero di punti
h = (b-a)/(N-1); % distanza tra i punti

% calcolo del valore dell'integrale
int_value = (fi(1) + 2 * sum (fi(2:N-1)) + fi(N))*h/2;
```

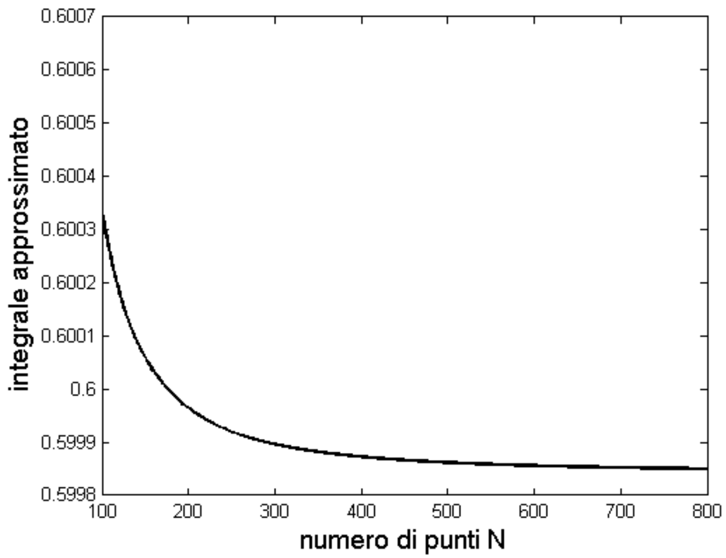
Dal Command Window

```
>> f = @(x)[exp(-x).*((cos(x)).^2 )];
>> xi = linspace(0,-log((.5*10^(-3))),292);
>> fi = f(xi);

>> int_value = trapezi(fi,0,-log(.5*10^(-3)));
>> disp(int_value)
   0.59989905470163

>> int_value = trapz(xi,fi);
>> disp(int_value)
   0.59989905470163
```

Esercizio

Si riscriva la funzione dell'esercizio precedente. I parametri di input sono: la funzione di cui si vuole calcolare l'integrale e il numero di punti N da usare nella formula dei trapezi. Si calcoli l'integrale della funzione dell'esercizio precedente con $N = 100, \cdots, 800$ e si confrontino i risultati.

```
f = @(x)[exp(-x).*((cos(x)).^2 )];
N = 100:800;
for i = 1:length(N)
    int_value(i) = trapezi2(f,0,-log(.5*10^(-3)),N(i));
end
figure, plot(N,int_value)
xlabel('numero di punti N')
ylabel('integrale approssimato')
```



N	int_value
282	0.599903
283	0.599903
284	0.599902
285	0.599902
286	0.599901
287	0.599901
288	0.599901
289	0.599900
290	0.599900
291	0.599899
292	0.599899
293	0.599899
294	0.599898
295	0.599898
296	0.599898
297	0.599897
298	0.599897
299	0.599896
300	0.599896
301	0.599896
302	0.599895

```
function [I] = parabole(xnodi,fnodi)
% I=parabole(xnodi,fnodi): Approssimazione di un integrale
% con la formula delle parabole
%
% INPUT
% xnodi = punti dell'intervallo di intergrazione
%         in cui si conosce il valore della funzione
% ynodi = valore della funzione da integrare valutata nei punti xnodi
%
% OUTPUT
% I = approssimazione dell'integrale

nnodi = length(xnodi);
a = xnodi(1);
b = xnodi(nnodi);
h = (b-a)/(nnodi-1);
I = h/3*(fnodi(1)+4*sum(fnodi(2:2:nnodi-1))+ ...
   2*sum(fnodi(3:2:nnodi-2))+fnodi(nnodi));
```

Usando la formula delle parabole per valutare l'integrale dell'esercizio precedente si ha

```
>> I = parabole(xi,fi)

I =

   0.59984121703556
```

Mentre usando la funzione predefinita di Matlab quad.m (usa la formula di Newton ricorsivamente in modo da ottenere un errore di almeno 10^{-6}).

```
>> quad(f,0,-log(.5*10^(-3)))

ans =

   0.59984217665775
```

Esercizio

Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

usando la formula delle parabole e un numero di segmenti $N = 20, \ldots, 200$ di passo 4.

Calcolare le approssimazioni per ogni N e calcolare l'errore assoluto E_N rispetto al valore esatto dell'integrale.

Verificare che l'errore non decresce come $\frac{1}{N^4}$ ma come $\frac{1}{N^6}$.

Soluzione

Il valore esatto dell'integrale è $I = [\arctan(x)]_o^1 = \frac{\pi}{4}$.

Per il calcolo dell'integrale approssimato, si usa la funzione parabole.m opportunamente modificata:

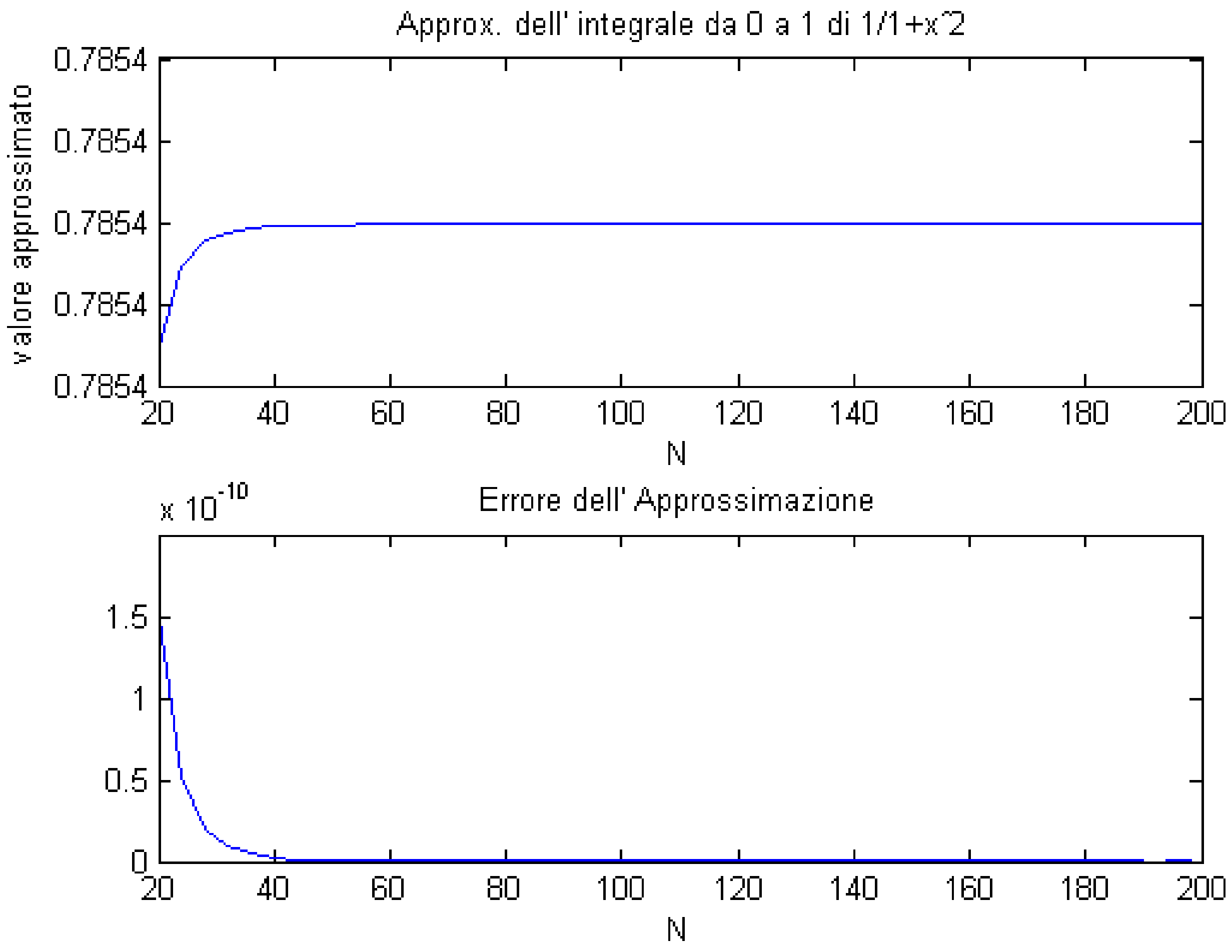
```
function [IN] = parabole_mod(fun,a,b,N)
% IN = parabole_mod(fun,a,b,N): Approssimazione di un integrale
% con la formula delle parabole
%
% INPUT
% fun: funzione da integrare
% a = estremo inferiore dell'intervallo di integrazione
% b = estremo superiore dell'intervallo di integrazione
% N : numero di intervalli da usare nella formula di quadratura
%
% OUTPUT
% I = approssimazione dell'integrale

% Controllo se  il numero di nodi  dispari
if mod(N,2) ~= 0
   error('N deve essere un numero pari!!!')
end
```

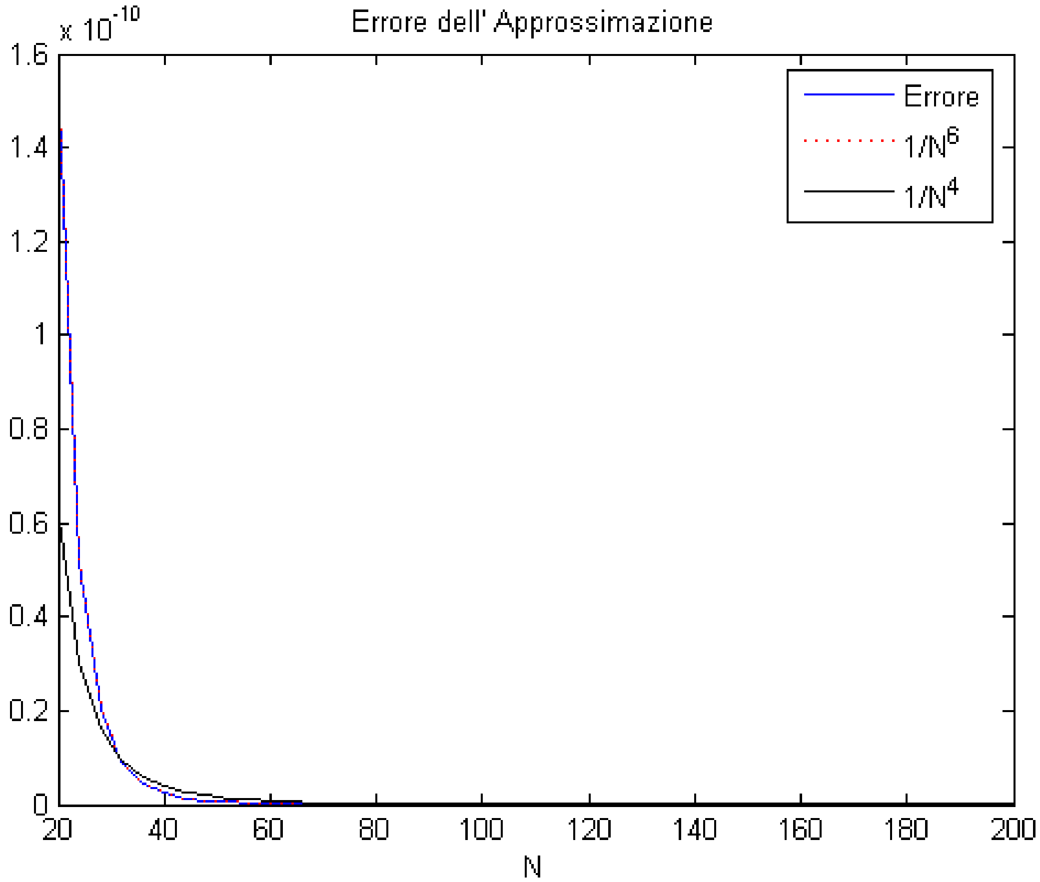
```
% calcolo il passo e il numero di nodi
h = (b-a)/(N);
nnodi = N+1;
xi = linspace(a,b,nnodi);
f_primo = fun(xi(2:2:nnodi-1));
f_secondo = fun(xi(3:2:nnodi-2));
IN = h/3*(fun(xi(1))+4*sum(f_primo)+ 2*sum(f_secondo)+fun(xi(nnodi)));
```

da cui

```
J = pi/4;

N = [20:4:200];
f = @(x) 1./(1+x.^2);

for i = 1:length(N)
    IN(i) = parabole_mod(f,0,1,N(i));
    EN(i) = abs(IN(i)-J);
end
```

```
figure
subplot(2,1,1)
plot(N, IN)
title(' Approx. dell'' integrale da 0 a 1 di 1/1+x2')
xlabel('N')
ylabel('valore approssimato')
subplot(2,1,2)
plot(N,EN)
title('Errore dell'' Approssimazione')
xlabel('N')

figure
plot(N,EN)
hold on, plot(N,.01./N.^6,'r:')
hold on, plot(N,.00001./N.^4,'k')
title('Errore dell'' Approssimazione')
xlabel('N')
legend('Errore','1/N^6','1/N^4')
```


Approx. dell' integrale da 0 a 1 di 1/1+x^2
valore approssimato
0.7854
0.7854
0.7854
0.7854
0.7854
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
N
x 10^-10
Errore dell' Approssimazione
1.5
1
0.5
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
N



L'errore di approssimazione decresce come $\frac{1}{N^6}$.

Criterio di Runge

Nel caso delle **formule generalizzate** è possibile **stimare il resto** senza ricorrere al calcolo della derivata.

Formula dei trapezi: $R_h^T(f) = -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \qquad \tau \in [a,b]$

Passo $h \rightarrow I(f) = T_h(f) + R_h^T(f) = T_h(f) - \left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau)$

Passo $\frac{h}{2} \rightarrow I(f) = T_{h/2}(f) + R_{h/2}^T(f) = T_{h/2}(f) - \left(\frac{b-a}{12}\right) \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\sigma)$

Se $f''(x)$ varia poco in $[a,b] \Rightarrow f''(\tau) \simeq f''(\sigma)$

$$\Rightarrow R_h^T(f) = -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau) \simeq -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\sigma) = 4R_{h/2}^T(f)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Passo } h \;\rightarrow\; I(f) \simeq T_h(f) + 4R^T_{h/2}(f) \\[2ex] \text{Passo } \dfrac{h}{2} \;\rightarrow\; I(f) = T_{h/2}(f) + R^T_{h/2}(f) \end{array}\right\}$$

Sottraendo le due formule si ottiene $\Downarrow$

$$\boxed{\textbf{Criterio di Runge (per trapezi):}\; R^T_{h/2}(f) \simeq \frac{1}{3}\left(T_{h/2}(f) - T_h(f)\right)}$$

Formula delle parabole: $R^P_h(f) = -\left(\dfrac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau) \qquad \tau \in [a,b]$

Passo $h \rightarrow I(f) = P_h(f) + R^P_h(f) = P_h(f) - \left(\dfrac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau)$

Passo $\dfrac{h}{2} \rightarrow I(f) = P_{h/2}(f) + R^P_{h/2}(f) = P_{h/2}(f) - \left(\dfrac{b-a}{180}\right)\left(\dfrac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\sigma)$

Se $f^{(4)}(x)$ varia poco in $[a,b] \Rightarrow f^{(4)}(\tau) \simeq f^{(4)}(\sigma)$

$$\Rightarrow R^P_h(f) = -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\tau) \simeq -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(4)}(\sigma) = 16 R^P_{h/2}(f)$$

$$\boxed{\textbf{Criterio di Runge (per parabole):}\; R^P_{h/2}(f) \simeq \frac{1}{15}\left(P_{h/2}(f) - P_h(f)\right)}$$

Estrapolazione di Richardson

Il **criterio di Runge** permette di **stimare** il resto tramite le sole **parti approssimanti** relative ai passi h e $h/2$.

La **stima** ottenuta può essere utilizzata per ottenere una **nuova approssimazione**, più accurata, dell'integrale.

Estrapolazione di Richardson (per trapezi):

$$I(f) = T_{h/2}(f) + R^{T}_{h/2}(f) \simeq T_{h/2}(f) + \frac{1}{3}(T_{h/2}(f) - T_h(f))$$

Estrapolazione di Richardson (per parabole):

$$I(f) = P_{h/2}(f) + R^{P}_{h/2}(f) \simeq P_{h/2}(f) + \frac{1}{15}(P_{h/2}(f) - P_h(f))$$

Esempio

Qual'è l'**errore** che si commette approssimando la lunghezza della pista con la **formula dei trapezi**?

Per stimare l'errrore si può utilizzare il **criterio di Runge** utilizzando come approssimazione al passo $h/2$ l'approssimazione con passo $h/2 = 6$ (si usano **tutti** i nodi) e come approssimazione al passo h l'approssimazione al passo $h = 12$ (si usano **solo** gli 8 nodi $i = 0, 2, 4, \ldots, 14$).

Criterio di Runge per trapezi: $R \approx \frac{1}{3}(9855 - 9846) = 3$

Estrapolazione di Richardson: $L \approx 9855 + \frac{1}{3}(9855 - 9846) = 9858$

E' possibile applicare il criterio di Runge per la **formula delle parabole**?

Suggerimento: Dividere l'intervallo di integrazione in due sottointervalli, $[0, 72]$ e $[72, 84]$, quindi applicare il criterio di Runge per parabole nel primo intervallo e il criterio di Runge per trapezi nel secondo.

Esercizio

$$I(e^x) = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1 \simeq 1.7182818$$

Passo $h = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $P_{1/2}(e^x) = \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0.5} + e^1) \simeq 1.7188611$

$$I(e^x) - P_{1/2}(e^x) = -0.58 \cdot 10^{-3}$$

Passo $h = \frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $P_{1/4}(e^x) = \frac{1}{12}[e^0 + 4(e^{0.25} + e^{0.75}) + 2e^{0.5} + e^1] \simeq 1.7183188$

$$I(e^x) - P_{1/4}(e^x) = -0.37 \cdot 10^{-4}$$

Criterio di Runge:

$$R^P_{1/4} \simeq \frac{1}{15}(P_{1/4}(e^x) - P_{1/2}(e^x)) = \frac{1}{15}(1.7183188 - 1.7188611) = -0.36 \cdot 10^{-4}$$

Estrapolazione di Richardson:

$$I(e^x) \simeq P_{1/4}(e^x) + \frac{1}{15}(P_{1/4}(e^x) - P_{1/2}(e^x)) \simeq 1.7182826 = A$$

$$I(f) - A = 1.7182818 - 1.7182826 = -0.8 \cdot 10^{-6}$$

Esercizio

Data la tabella

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
f_i	1.64872	1.28402	1.00000	0.77880	0.60653

relativa ai valori, affetti da errore, di una funzione $f(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$,

1.1) approssimare $\int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx$ usando la formula dei trapezi generalizzata su 5 nodi;

1.2) dare una stima dell'errore di troncamento;

1.3) stabilire se l'errore di propagazione può essere trascurato rispetto all'errore di troncamento motivando la risposta.

Soluzione

1.1 Utilizzando $n = 5$ nodi nell'intervallo $[a, b] = [-0.5, 0.5]$ si ha un passo

$$h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{1}{4}.$$

Dunque, l' approssimazione dell'integrale è data da:

$$\begin{aligned} T_h(f) &= \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-2} f_i + f_{n-1}) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) = \\ &= 0.125(1.64872 + 2 \cdot 1.28402 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0.7788 + 0.60653) = \\ &= 1.04761 \end{aligned}$$

1.2 Per valutare l'errore di troncamento, non avendo informazioni sulla derivata seconda di f, si applica la formula dei trapezi su tre nodi con passo $2\,h = 0.5$,

$$
\begin{aligned}
T_{2h}(f) &= \frac{2\,h}{2}(f_0 + 2f_2 + f_4) = \\
&= 0.25(1.64872 + 2 \cdot 1 + 0.60653) = 1.06381.
\end{aligned}
$$

Sapendo che $f(x) \in C^{\infty}$, si può utilizzare il criterio di Runge per la stima dell'errore di troncamento e quindi:

$$
R_h(f) \approx \frac{T_h(f) - T_{2h}(f)}{3}
$$

da cui

$$
R_h(f) \approx \frac{1.04761 - 1.06381}{3} = -0.54 \cdot 10^{-2}
$$

Usando l'estrapolazione di Richardson, la approssimazione dell'integrale migliora come segue

$$I(f) \approx T_h + (-0.54 \cdot 10^{-2}) = 1.04221.$$

1.3 I valori della funzione nei nodi sono dati con precisione $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$. Poichè i coefficienti della formula di quadratura sono tutti positivi, risulta che l'errore di propagazione $R^*(f)$ è tale che

$$R^*(f) \leq \epsilon(b-a) = 0.5 \cdot 10^{-5}.$$

Quindi, **l'errore di propagazione è trascurabile rispetto all'errore di troncamento**.

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 7 §§ 7.1, 7.2, 7.3 (escluse formule di Newton-Cotes aperte), 7.4, 7.5 (escluso metodo di Romberg), 7.9

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*: 4.1-4.7, 4.9, 4.10, 4.21, 7.3, 7.8, 7.9, 7.17, 7.23, 7.28, 7.30, 7.42, 7.47, 7.48, 7.71, 7.78, 7.82, 7.84

Esercizi d'esame

ESERCIZIO 1

1.1) Scrivere la formula dei trapezi composta che approssima il valore di

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

con almeno 3 cifre decimali esatte. Si trascuri l'errore di propagazione;

1.2) Assumendo che i valori della funzione integranda siano dati con 10 cifre decimali esatte, dare una stima dell'errore che si commette nell'approssimare π nel caso in cui si utilizzi la formula delle parabole composta con un numero di nodi comparabile con quello individuato al punto precedente per la formula dei trapezi.

Soluzione

1.1) L'errore di troncamento della formula dei trapezi composta con $m+1$ punti è

$$R_m^T = -\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2 f''(\tau), \qquad \tau \in (a,b),$$

con f funzione integranda, a e b estremi dell'intervallo di integrazione, $h = \frac{b-a}{m}$.

$$|R_m^T| < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

se

$$\left|\left(\frac{b-a}{12}\right) h^2\right| \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 0.5 \cdot 10^{-3},$$

cioè , detto $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, se

$$m > \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{\frac{M}{12 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}}.$$

Si verifica facilmente che $f'(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}$ e $f''(x) = \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Poiché $f''(x)$ è una funzione crescente in $[0,1]$ e si annulla in $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha

$$M = \max\{|f''(0)|, |f''(1)|\} = \max\{8, 2\} = 8.$$

Quindi

$$m > \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 36.5,$$

cioè $m = 37$.

1.2) Poichè nella formula delle parabole il numero di nodi deve essere dispari, si deve scegliere $m = 38$. Sostituendo $m = 38$ nella formula dell'errore di troncamento relativo alla formula delle parabole composta, si ha

$$|R_m^P| = |\frac{(b-a)}{180 \cdot m^4} f^{(4)}(\tau)| \leq |\frac{(b-a)}{180 \cdot m^4}| M_4$$

con $M_4 = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|$, cioè

$$|R_m^P| < \frac{96}{180 \cdot 38^4} \approx 0.26 \cdot 10^{-6} < 0.5 \cdot 10^{-6},$$

essendo $f^{(4)}(x) = 96\frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5}$.

I valori della funzione nei nodi sono dati con precisione $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-10}$. Poichè i coefficienti della formula di quadratura sono tutti positivi, l'errore di propagazione $R^*(f)$ è tale che

$$R^*(f) \leq \epsilon(b-a) = 0.5 \cdot 10^{-10}$$

che è trascurabile rispetto all'errore di troncamento.

ESERCIZIO 2

Data la tabella

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
f_i	0.64872	0.28402	0.00000	-0.22120	-0.39347

relativa ai valori, affetti da errore, di una funzione $f(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$,

2.1) approssimare $\int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx$ usando la formula dei trapezi generalizzata su 5 nodi;

2.2) dare una stima dell'errore di troncamento;

2.3) stabilire se l'errore di propagazione può essere trascurato rispetto all'errore di troncamento motivando la risposta.

ESERCIZIO 3

3.1) Scrivere la formula dei trapezi composta che approssima il valore dell'integrale

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{1+z^2}\, dz$$

con almeno 3 cifre decimali esatte. Si trascuri l'errore di propagazione;

3.2) Assumendo che i valori della funzione integranda siano dati con 10 cifre decimali esatte, dare una stima dell'errore che si commette nell'approssimare I nel caso in cui si utilizzi la formula delle parabole composta con un numero di nodi comparabile con quello individuato al punto precedente per la formula dei trapezi.

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente tabella relativa alla funzione $f(x)$, con $f \in C^{\infty}(\mathbf{R})$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-5	1	1	1	7	25

Sapendo che i dati in tabella sono esatti,

4.1) dare una stima dell'errore che si commette approssimando $I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$ con una opportuna formula delle parabole.

4.2) calcolare il valore esatto di I usando una opportuna formula di interpolazione.

Suggerimento: Usare la formula delle parabole generalizzata prima su tre nodi e poi su 5 e stimare l'errore con il criterio di Runge. Costruire la tavola alle differenze divise.

ESERCIZIO 5

5.1) Illustrare la costruzione delle formule di quadratura interpolatorie scrivendo esplicitamente l'espressione della parte approssimante, del resto e dell'errore di propagazione. Dare la definizione di ordine di precisione di una formula di quadratura e dimostrare che la formula delle parabole generalizzata ha grado di precisione 3.

5.2) Determinare il grado di precisione delle seguenti formule di quadratura per l'approssimazione numerica di $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, con $f(x) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$:

- $I(f) = \frac{1}{45}(7f(-1) + 32f(-1/2) + 12f(0) + 32f(1/2) + 7f(1))$
- $I(f) = \frac{1}{4}(f(-1) + 3f(-1/3) + 3f(1/3) + f(1))$
- $I(f) = \frac{1}{6}(f(-1) + 4f(-1/2) + 2f(0) + 4f(1/2) + f(1))$

Traccia della soluzione Si osserva che la seconda formula di quadratura è la formula dei 3/8 costruita sui nodi $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{-1\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\}$, quindi il suo grado di precisione è 3.

La terza formula di quadratura è la formula delle parabole generalizzata costruita sui nodi $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-1\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\}$, quindi il suo grado di precisione è 3.

La prima formula di quadratura è costruita su nodi simmetrici rispetto allo 0 e i coefficienti sono simmetrici rispetto al valore centrale. Ne segue che è esatta per tutti i polinomi di grado dispari.

Infatti $\int_{-1}^{1} x^{2k+1} = 0$ e $I(x^{2k+1}) = 0$.

E' necessario verificare se la formula è esatta per i monomi $x^{2k}, \quad k \in \mathbf{N}$

$$\int_{-1}^{1} x^0 = 2 \qquad\qquad I(x^0) = \frac{90}{45} = 2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 = \frac{2}{3} \qquad\qquad I(x^2) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 = \frac{2}{5} \qquad\qquad I(x^4) = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} x^6 = \frac{2}{7} \qquad\qquad I(x^6) = \frac{1}{3}$$

Si conclude che la prima formula di quadratura ha grado di precisione 5.

ESERCIZIO 6

1.1 Illustrare dettagliatamente il problema della quadratura numerica con particolare riferimento alla stima delle diverse tipologie di errore.

1.2 Stabilire se è possibile usare la seguente tavola alle differenze divise

f_i	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
1	2.999999993	-0.000539915	-4.501607328	18.068012364	-126464.232604678
1.00011999999971	2.999999950	-0.001080108	-4.498716446	-7.224834157	
1.00023999999770	2.999999863	-0.001619954	-4.499872419		
1.00035999999222	2.999999734	-0.002159939			
1.00047999998157	2.999999561				
1.00059999996400					

per dare una stima dell'errore di troncamento commesso calcolando l' integrale

$$I = \int_{0.00004}^{0.0002} (1 + sin(3x))dx$$

con la formula delle parabole costruita su cinque nodi equidistanti nell'intervallo $[0.00004,\ 0.0002]$. In caso di riposta negativa, proporre un metodo alternativo di stima dell'errore di troncamento.