Questi elementi di raccordo fra i corsi di Fisica I e Fisica II hanno lo scopo di evidenziare alcuni concetti base di calcolo vettoriale, cinematica e dinamica che dovranno essere dati per acquisiti durante la trattazione dell'elettromagnetismo[1]*.*

Come sistema di studio fissiamo l'attenzione sulla forza gravitazionale $\vec{F} = -\gamma\ Mm/r^2\ \hat{r}$ che si esercita fra due masse M e m (per esempio sole-terra)[2].

In questa legge sperimentale, dove r è la distanza fra le due masse e il versore $\hat{r}$ è orientato da M verso m, l'intensità della forza che M esercita su m è uguale a quella che m esercita su M (III principio della dinamica).

Dal II principio della dinamica $\vec{F} = m\ \vec{a}$ discende che l'intensità delle accelerazioni di M e m sono invece diverse: $a_M = F/M$; $a_m = F/m \rightarrow a_M/a_m = m/M$

Per semplicità supponiamo che durante l'evoluzione del sistema la massa M rimanga sostanzialmente ferma ($a_M << a_m$; nel caso sole-terra $m/M = 6x10^{24}kg/2x10^{30}kg = 3x10^{-6}$) e fissiamo l'origine del sistema di riferimento in M.

Se la massa m fosse inizialmente ferma o si muovesse lungo la direzione congiungente le due masse il moto sarebbe rettilineo con accelerazione proporzionale all'inverso della distanza[3].

Scegliamo allora come asse x quello orientato da M verso m.

La forza gravitazionale è conservativa (dipende solo dalla posizione e quindi il lavoro per andare da A a B dipende solo dalle loro posizioni e non dal percorso). Pertanto si può calcolare l'energia potenziale $U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} - F\,dx = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} \gamma\ Mm/x^2\ dx = U(x_0) - \gamma\ Mm(1/x-1/x_0)$ e, scegliendo $x_0 \rightarrow \infty$ e $U(\infty) = 0$ (questa convenzione è usuale per forze che si esercitano a grandi distanze), si ottiene $U(x) = -\gamma\ Mm/x$.

Dalla conservazione dell'energia si ha quindi $E = K + U = ½\ m\ v^2 - \gamma\ Mm/x = cost.$

Qualora la velocità della massa m avesse inizialmente una direzione generica il moto non sarebbe rettilineo e quindi la posizione P(x,y,z) di m sarebbe determinata dal vettore $\vec{r} = \hat{i}\ x + \hat{j}\ y + \hat{k}\ z$ caratterizzato da intensità e verso definiti da $\rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$.

In questo caso l'energia potenziale è $U(x,y,z) = U(\vec{r}) = U(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} - \vec{F}\,\overrightarrow{ds} = U(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \gamma\ Mm/r^2\ \hat{r}\,\overrightarrow{ds} =$
$= U(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \gamma\ Mm/r^2\ dr$ dove $\hat{r}\,\overrightarrow{ds} = dr$ perché lungo la linea di integrazione gli elementi $\overrightarrow{ds}$ sono scomponibili in tratti nella direzione radiale $\overrightarrow{ds} = \hat{r}\,dr \rightarrow \hat{r}\,\overrightarrow{ds} = dr$ e tratti in direzione perpendicolare a $\hat{r}$ per cui $\hat{r}\,\overrightarrow{ds} = 0$. Ne segue che $U(\vec{r}) = U(r) = U(r_0) + \int_{r_0}^{r} \gamma\ Mm/r^2\ dr$ da cui, scegliendo $U(\infty) = 0$, si ottiene $U(\vec{r}) = -\gamma\ Mm/r$.

---

(1) sarò ovviamente a disposizione per rinfrescare questi concetti ma solo al di fuori dell'orario delle lezioni

(2) questo studio tornerà utile quando si analizzerà la struttura dell'atomo d'idrogeno: basterà sostituire la forza gravitazionale con la forza coulombiana fra cariche elettriche $\vec{F} = k\ qQ/r^2\ \hat{r}$

(3) l'equazione differenziale che descrive il moto: $d^2x/dt^2 - \gamma\ M/x^2 = 0$ non è risolvibile banalmente.

Dalla conservazione dell'energia si ha quindi $E = K + U = ½ m v^2 – \gamma Mm/r = cost.$

Nota l'energia potenziale è possibile riottenere la forza che agisce sulla massa m: $\vec{F} = - \overrightarrow{grad}\, U$ utilizzando l'operatore $\overrightarrow{grad} = \hat{i}\, \partial/\partial x + \hat{j}\, \partial/\partial y + \hat{k}\, \partial/\partial z$[4] da cui $\vec{F} = -(\hat{i}\, \partial U/\partial x + \hat{j}\, \partial U/\partial y + \hat{k}\, \partial U/\partial z)$.
Il primo termine $\partial U/\partial x = \partial(-\gamma\, Mm/r)/\partial x = d(-\gamma\, Mm/r)/dr\, \partial r/\partial x = \gamma\, Mm/r^2\, \partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/\partial x =$
$= \gamma\, Mm/r^2\, x/r$; analogamente $\partial U/\partial y = \gamma\, Mm/r^2\, y/r$ e $\partial U/\partial z = \gamma\, Mm/r^2\, z/r$.
Pertanto $\vec{F} = - \gamma\, Mm/r^2\, (\hat{i}\, x/r + \hat{j}\, y/r + \hat{k}\, z/r) = - \gamma\, Mm/r^2\, \vec{r}/r = - \gamma\, Mm/r^2\, \hat{r}$ [5].

La forza gravitazionale è una forza centrale (agisce lungo la direzione di $\vec{r}$): $\vec{F} = f(r)\, \hat{r}$ e quindi il suo momento, calcolato rispetto all'origine presa come polo, vale $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\, \hat{r} = 0$.
Essendo $\vec{M} = d\vec{L}/dt = 0$ il momento angolare calcolato rispetto allo stesso polo $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ si conserva.
Questo implica, tra l'altro, che $\vec{L}$ non varia la sua direzione e quindi il moto è un moto piano (si svolge lungo il piano perpendicolare a $\vec{L}$). Per variare l'orientamento del piano della traiettoria occorre quindi modificare la direzione di $\vec{L}$ e questo si ottiene applicando a $\vec{L}$ una variazione $\overrightarrow{dL} = \vec{M}\, dt$ perpendicolare a $\vec{L}$ stesso.
La conservazione del verso di $\vec{L}$, invece, implica che il moto non cambia il verso orario/antiorario. Per variare intensità e/o verso di $\vec{L}$ occorre applicare a $\vec{L}$ una variazione $\overrightarrow{dL} = \vec{M}\, dt$ parallela/antiparallela a $\vec{L}$ stesso[6].

Supponiamo che inizialmente la velocità di m sia perpendicolare a $\vec{r}$ [7]. In quell'istante, quindi, il lavoro elementare compiuto dalla forza gravitazionale varrebbe $dL = \vec{F}\, \overrightarrow{ds} = F\, ds \cos(\pi/2) = 0$ e questo implicherebbe ($dK = dL$) che l'energia cinetica non varierebbe e quindi il moto di m si svolgerebbe con velocità $\vec{v}$ costante in modulo ($v = cost$).
Essendo $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{r}$ la conservazione del momento angolare implica anche che lo sia il suo modulo: $|\vec{r} \times m\vec{v}| = |r\, mv \sin(\pi/2)| = r\, mv = cost$.
Questa relazione, combinata con la conservazione dell'energia cinetica per cui $v = cost$, implica che sia costante anche il raggio r. Di conseguenza il moto risultante è circolare uniforme: la direzione di $\vec{v}$ varia per via della natura centripeta della forza gravitazionale: $\vec{F} = -\gamma\, Mm/r^2\, \hat{r} = m\, \overrightarrow{a_n} = - m\, v^2/r\, \hat{r}$.
Da questa relazione si ricava $\gamma\, M/r = v^2$.

---

[4] utilizzeremo altri due operatori differenziali lineari: la divergenza e il rotore che, a differenza del gradiente che agisce su un campo scalare, si applicano a un campo vettoriale fornendo il primo uno scalare ($u = \mathrm{div}\, \vec{v}$) e il secondo un vettore ($\vec{u} = \overrightarrow{rot}\, \vec{v}$).
Con notazione più compatta spesso si omette il segno di vettore sui simboli $\overrightarrow{grad}$ e $\overrightarrow{rot}$.
Alcuni testi utilizzano una simbologia ancora più compatta introducendo il simbolo ∇ detto "del" o "nabla": $\vec{v} = \nabla u$ (il gradiente applicato a uno scalare produce un vettore); $u = \nabla\vec{v}$ (la divergenza di un vettore produce uno scalare); $\vec{u} = \nabla \times \vec{v}$ (il rotore produce un vettore)
[5] tornerà utile la relazione ottenuta $grad\,(1/r) = -1/r^2\, \hat{r}$
[6] tornerà utile ricordare che applicando un momento meccanico si ottiene una variazione di $\vec{L}$ (precessione di Larmor)
[7] incontreremo una forza (Lorentz) che essendo sempre perpendicolare alla traiettoria non compie lavoro

L'energia meccanica è quindi $E = K + U = ½ m v^2 – \gamma Mm/r = ½ m v^2 – m v^2 = -½ m v^2 = – ½ \gamma Mm/r$ (negativa per via della scelta $U(\infty) = 0$ e quindi $U < 0$).
Se l'energia meccanica è negativa, come in questo caso, dato che K non può essere negativa il moto del corpo è vincolato (sistema legato) alle regioni spaziali in cui E>U.

E se la velocità iniziale non fosse perpendicolare a $\vec{r}$? Si potrebbe dimostrare che la traiettoria potrebbe essere un'ellisse (di cui la circonferenza è un caso particolare) ma anche, in funzione dell'energia meccanica del sistema, un'altra conica (parabola, iperbole) corrispondente al moto di corpi che non orbitano intorno al sole ma la cui traiettoria viene deflessa dalla sua presenza e arriva fino all'infinito.
Inoltre l'energia cinetica non si conserverebbe: la traiettoria non sarebbe sempre perpendicolare alla forza gravitazionale che quindi produrrebbe una componente tangenziale dell'accelerazione. Di conseguenza varierebbe anche il modulo della velocità.
Ovviamente, essendo la forza gravitazionale conservativa, l'energia meccanica si conserverebbe anche in questo caso: la variazione di K verrebbe compensata dalla variazione di segno opposto di U (la traiettoria non sarebbe più circolare e quindi alla variazione di r corrisponderebbe quella di U).