SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI RUOTANTI IN COORDINATE POLARI

Calcolo dell'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} \vec{v} = v_r\hat{r} + r\omega\hat{\varphi} \\ \vec{v}' = v_r\hat{r} + r\omega'\hat{\varphi} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v_r\hat{r} + r\omega\hat{\varphi}\right) = \frac{dv_r}{dt}\cdot\hat{r} + v_r\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\omega\hat{\varphi} +$$

$$+ r\frac{d\omega}{dt}\cdot\hat{\varphi} + r\omega\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = a_r\cdot\hat{r} + v_r\underbrace{\left(\vec{\omega}\wedge\hat{r}\right)}_{\omega\varphi} + v_r\omega\hat{\varphi} +$$

$$r\alpha\hat{\varphi} + r\omega\overbrace{\left(\vec{\omega}\wedge\hat{\varphi}\right)}^{-\omega\hat{r}} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \left(a_r - r\omega^2\right)\hat{r} + \left(2v_r\omega + r\alpha\right)\hat{\varphi}$$

a questo punto sostituiamo $\omega = \omega' + \omega_t$ e $\alpha = \alpha' + \alpha_t$

$$\vec{a} = \left[a_r - r\left(\omega' + \omega_t\right)^2\right]\hat{r} + \left[2v_r\left(\omega' + \omega_t\right) + r\left(\alpha' + \alpha_t\right)\right]\hat{\varphi}$$

$$= \left[\underline{a_r - r\omega'^2} - r\omega_t^2 - 2r\omega'\omega_t\right]\hat{r} + \left[\underline{2v_r\omega'} + 2v_r\omega_t + \underline{r\alpha'} + r\alpha_t\right]\hat{\varphi}$$

$\vec{a}'$

$$= \vec{a}' + \left[\underline{\underline{-r\omega_t^2}} - 2r\omega'\omega_t\right]\hat{r} + \left[2v_r\omega_t + \underline{\underline{r\alpha_t}}\right]\hat{\varphi}$$

$\vec{a}_t$ ⊛

$$= \vec{a}' + \vec{a}_t + \left[\left(-2r\omega'\omega_t\right)\hat{r} + \left(2v_r\omega_t\right)\hat{\varphi}\right]$$

$$= \vec{a}' + \vec{a}_t \underbrace{- 2\omega_t\left[\left(r\omega'\right)\hat{r} - \left(v_r\right)\hat{\varphi}\right]}_{\text{CORIOLIS}}$$

* $\vec{a}_t$ viene direttamente dalla def. di $\vec{v}_t = r\omega_t\hat{\varphi}$ ed è solo tangente (non ha componenti radiale)

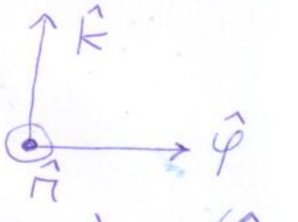
Quindi $\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}_t}{dt} = \underbrace{\cancel{\dfrac{dr}{dt}}}_{0}\cdot\omega_t\hat{\varphi} + r\dfrac{d\omega_t}{dt}\hat{\varphi} + r\omega_t\dfrac{d\hat{\varphi}}{dt}$

$$\vec{a}_t = r\alpha_t\hat{\varphi} + r\omega_t\cdot(\vec{\omega}_t\wedge\hat{\varphi}) = r\alpha_t\hat{\varphi} - r\omega_t^2\hat{r}$$

Il termine di CORIOLIS $-2\omega_t(r\omega'\hat{r} - v_r\hat{\varphi})$ può essere rappresentato attraverso il prodotto vettoriale $\vec{\omega}_t\wedge\vec{v}'$. Infatti i due vettori

$$\vec{\omega}_t \equiv (0; 0; \omega_t) \quad e \quad \vec{v}' = (v_r; r\omega'; 0)$$

possono essere espressi con tali coordinate nel sistema di rif. $(\hat{r}; \hat{\varphi}; \hat{k})$



$$\vec{\omega}_t\wedge\vec{v}' = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_t \\ v_r & r\omega' & 0 \end{vmatrix} = \hat{r}(-r\omega'\omega_t) - \hat{\varphi}(-v_r\omega_t) + \cancel{0}\hat{k}.$$

$$= -\left[(r\omega'\omega_t)\hat{r} - (v_r\omega_t)\hat{\varphi}\right] = -\omega_t\left[(r\omega')\hat{r} - (v_r)\hat{\varphi}\right]$$

quindi il termine $-2\omega_t(r\omega'\hat{r} - v_r\hat{\varphi})$ può essere espresso come $+2\vec{\omega}_t\wedge\vec{v}'$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \underbrace{2\vec{\omega}_t\wedge\vec{v}'}_{\vec{a}_c}$$

$\vec{a}_c$ Accelerazione di Coriolis

OB