

A.A. 2019/20  
docente: Sandra Carillo

Esercitazione 1  
**Metodo Perturbativo Diretto**

con l'ausilio del programma di calcolo simbolico  
ToolBox in MatLab

[MuPAD http://www.mupad.de/](http://www.mupad.de/)

Problema dell'oscillatore *debolmente* smorzato

In questa esercitazione consideriamo il problema  
a valori iniziali seguente, indicato con (1):

$$\begin{cases} f'' + 2\varepsilon f' + f = 0, & 0 < \varepsilon \ll 1 \text{ dove } \varepsilon \text{ indica il } \textit{parametro piccolo} \\ f(0) = 1 & \text{incognita } f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

dove l'incognita e` la funzione

```
ivp := ode({f''(x) + 2*`&epsiv;`*f'(x) + f(x) = 0, f(0) = 1, f'(0) = 0}, f(x))
```

$$f(x; \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f_k(x) = f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \epsilon^2 f_2(x) + \epsilon^3 f_3(x) + \epsilon^4 f_4(x) + \dots$$

Vogliamo, cioè, studiare il moto di un punto materiale di massa  $m=1$ , soggetto ad una forza elastica, con costante elastica  $K=1$ , vincolato bilateralmente ad una linea orizzontale in presenza di un attrito *piccolo*.

Consideriamo i casi

a) `\epsilon=.1;`

$$\epsilon = 0.1$$

b) `\epsilon=.01;`

$$\epsilon = .01$$

c) (attenzione 0.5 non è piccolo !) `\epsilon=.5;`

$$\epsilon = .5$$

Caso a) sostituendo il valore di epsilon nella (1), otteniamo il seguente ivp, indicato con (2):

`ivp := ode({f''(x) + 2*0.1*f'(x) + f(x)=0, f(0) = 1, f'(0) = 0}, f(x))`

$$\text{ode} \left( \left\{ f(0) = 1, f'(0) = 0, f(x) + 0.2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \right\}, f(x) \right)$$

la cui soluzione esatta, indicata con (3), è data da:

`Fes(x):=solve(ivp);`

$$\left\{ 1.0 \cdot \cos(0.9949874371 \cdot x) - e^{-0.1 \cdot x} + 0.1005037815 \cdot \sin(0.9949874371 \cdot x) - e^{-0.1 \cdot x} \right\}$$

nella quale mettiamo in evidenza il termine esponenziale, ottenendo la seguente, indicata con (4):

**Fex(x) := simplify(%)**

$$\left\{ e^{-0.1 \cdot x} \cdot (\cos(0.9949874371 \cdot x) + 0.1005037815 \cdot \sin(0.9949874371 \cdot x)) \right\}$$

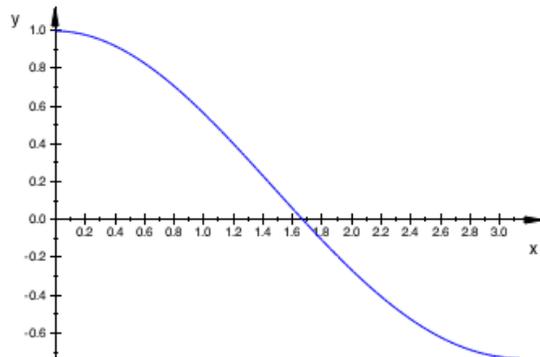
che possiamo anche scrivere come:

**F(x) := Fex(x);**

$$\left\{ e^{-0.1 \cdot x} \cdot (\cos(0.9949874371 \cdot x) + 0.1005037815 \cdot \sin(0.9949874371 \cdot x)) \right\}$$

indicata con (5), il cui grafico, e`

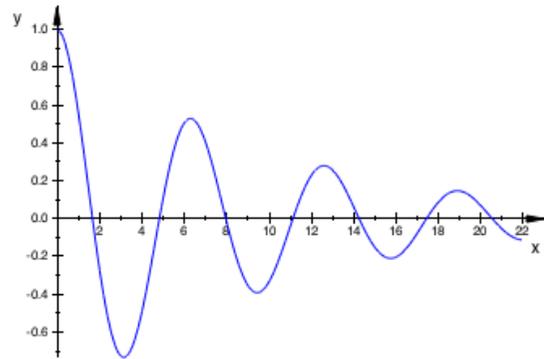
**plotfunc2d(exp(-.1\*x)\*(cos(0.9949874371\*x)+0.1005\*sin(0.9949874371\*x)),x=0..PI)**



nell'intervallo 0..PI, e

**plotfunc2d(exp(-.1\*x)\*(cos(0.9949874371\*x)+0.1005\*sin(0.9949874371\*x)),x=**

**0..7\*PI)**



nell'intervallo  $0..7\pi$ . Adesso calcoliamo la soluzione mediante lo sviluppo perturbativo diretto, cioè sostituiamo (6)

$$f(x; \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f_k(x) = f_0(x) + \epsilon f_1(x) + \epsilon^2 f_2(x) + \epsilon^3 f_3(x) + \epsilon^4 f_4(x) + \dots$$

`f(x,`&epsilon;`) := f_0(x) + `&epsilon;` * f_1(x) + `&epsilon;`^2 * f_2(x) + `&epsilon;`^3 * f_3(x) + `&epsilon;`^4 * f_4(x);`

$$f_4(x) \cdot \epsilon^4 + f_3(x) \cdot \epsilon^3 + f_2(x) \cdot \epsilon^2 + f_1(x) \cdot \epsilon + f_0(x)$$

le cui derivate forniscono, rispettivamente, (7):

$$\frac{d}{dx} f(x; \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f'_k(x) = f'_0(x) + \epsilon f'_1(x) + \epsilon^2 f'_2(x) + \epsilon^3 f'_3(x) + \epsilon^4 f'_4(x) + \dots$$

`der1 := diff(f_0(x), x) + `&epsilon;` * diff(f_1(x), x) + `&epsilon;`^2 * diff(f_2(x), x) + `&epsilon;`^3 * diff(f_3(x), x) + `&epsilon;`^4 * diff(f_4(x), x);`

$$\frac{\partial}{\partial x} f_4(x) \cdot \epsilon^4 + \frac{\partial}{\partial x} f_3(x) \cdot \epsilon^3 + \frac{\partial}{\partial x} f_2(x) \cdot \epsilon^2 + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) \cdot \epsilon + \frac{\partial}{\partial x} f_0(x)$$

e (8):

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x; \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f_k''(x) = f_0''(x) + \epsilon f_1''(x) + \epsilon^2 f_2''(x) + \epsilon^3 f_3''(x) + \epsilon^4 f_4''(x) + \dots$$

```
der2:= diff(diff(f_0(x),x),x)+`&epsilon;`*diff(diff(f_1(x),x),x) +`&epsilon;`^2 *diff(diff(f_2(x),x),x) +
`&epsilon;`^3 * diff(diff(f_3(x),x),x) +`&epsilon;`^4 * diff(diff(f_4(x),x),x);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_4(x) \cdot \epsilon^4 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_3(x) \cdot \epsilon^3 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_2(x) \cdot \epsilon^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_1(x) \cdot \epsilon + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x)$$

ed imponiamo le condizioni iniziali, indicate con (9)

$$f(x; \epsilon)|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f_k(0) = f_0(0) + \epsilon f_1(0) + \epsilon^2 f_2(0) + \epsilon^3 f_3(0) + \epsilon^4 f_4(0) + \dots = a$$

nel caso che stiamo considerando  $a=1$  e' il valore iniziale della funzione nel punto  $x=0$ , quindi, all'ordine zero in 'epsilon' imponiamo (10):

```
f_0(0)=1;
```

$$\{a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)\}$$

e (11) agli ordini successivi, cioe` per  $k=1,2, \dots$

```
f_k(0)=0;
```

$$f_k(0) = 0$$

ed il valore iniziale della derivata prima della funzione nel punto  $x=0$

$$\frac{d}{dx} f(x; \epsilon)|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k f_k'(0) = f_0'(0) + \epsilon f_1'(0) + \epsilon^2 f_2'(0) + \epsilon^3 f_3'(0) + \epsilon^4 f_4'(0) + \dots = b$$

nel caso che stiamo considerando  $b=0$  e' il valore iniziale della derivata prima della funzione incognita nel punto  $x=0$ , quindi, all'ordine zero in epsilon imponiamo (12):

$$f_{0'}(0)=0;$$

$$f_0'(0) = 0$$

e le condizioni (13), agli ordini successivi, cioe' per  $k=1,2, \dots$

$$f_{k'}(0)=0;$$

$$a(\xi) \cdot \cos(x) + b(\xi) \cdot \sin(x)$$

L'equazione differenziale dell'oscillatore smorzato, nella quale siano state sostituite le (6), (7) e (8), assume la forma (14):

$$\text{der2} + 2 \cdot \epsilon \cdot \text{der1} + f(x, \epsilon) = 0;$$

$$2 \cdot a(\xi) \cdot \sin(x) - 2 \cdot b(\xi) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} b(\xi) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} a(\xi)$$

`ode2:=%:`

## Passo 2

Soluzione del problema all'ordine zero: consideriamo, cioe',  $\epsilon=0$  nella (14):

$$\text{subs}(\text{ode2}, \epsilon=0);$$

$$F_1(x, \xi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1(x, \xi) = 2 \cdot a(\xi) \cdot \sin(x) - 2 \cdot b(\xi) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} b(\xi) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} a(\xi)$$

che, considerando le condizioni iniziali (12) e (13), fornisce il seguente problema di Cauchy, (15)

`delete f0:`

ivp0 := ode({f\_0''(x) + f\_0(x) = 0, f\_0(0) = 1, f\_0'(0) = 0}, f\_0(x))

$$\text{ode}\left(\left\{f_0(0) = 1, f_0'(0) = 0, f_0(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x)\right\}, f_0(x)\right)$$

f0(x) := solve(ivp0);

$$\{\cos(x)\}$$

f0\_primo(x) := expand(diff(cos(x), x));

$$\text{ode}\left(\left\{F_1(0) = 0, F_1'(0) = 0, F_1(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot \left(b(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} b(\xi)\right) - 2 \cdot \sin(x) \cdot \left(a(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} a(\xi)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1(x)\right\}, F_1(x)\right)$$

ode2;

$$\text{ode}\left(\left\{f(0) = 0, f(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi)\right\}, f(\xi)\right)$$

expand(ode2, `&epsiv;`);

$$f_0(x) + 2 \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) + 2 \cdot \epsilon^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_2(x) + 2 \cdot \epsilon^3 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_3(x) + 2 \cdot \epsilon^4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_4(x) + \epsilon \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_1(x) + \epsilon^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_2(x) + \epsilon^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_3(x) + \epsilon^4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_4(x) + 2 \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_0(x)$$

$$f_0(x) + \epsilon \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_1(x) + 2 \cdot \epsilon \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} f_4(x) \cdot \epsilon + \frac{\partial}{\partial x} f_3(x) \cdot \epsilon^2 + \frac{\partial}{\partial x} f_2(x) \cdot \epsilon^3 + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) \cdot \epsilon + \frac{\partial}{\partial x} f_0(x)\right) + \epsilon^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_2(x) + \epsilon^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_3(x) + \epsilon^4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_4(x) + \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_1(x)$$

i termini del primo ordine in epsilon, con le condizioni iniziali omogenee per f1, cioè f1(0)=f1'(0)=0, forniscono il seguente problema di Cauchy, (16)

delete f1;f0(x);

$$\left\{e^{-\frac{x}{\epsilon}}\right\}$$

```
ivp1 := ode({f1''(x) + f1(x) = 2*(sin(x)), f1(0) = 0, f1'(0) = 0}, f1(x))
```

$$\text{ode}\left(\left\{\left\{f1(0) = 0, f1'(0) = 0, f1(x) - 2 \cdot \sin(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f1(x)\right\}, f1(x)\right\}\right)$$

```
f1(x) := solve(ivp1);
```

$$\{\sin(x) - x \cdot \cos(x)\}$$

In generale, otteniamo:

```
f(x) = f0(x) + ε * f1(x);
```

$$f(x) = \{\cos(x) + \varepsilon \cdot (\sin(x) - x \cdot \cos(x))\}$$

che, nel caso a) diventa

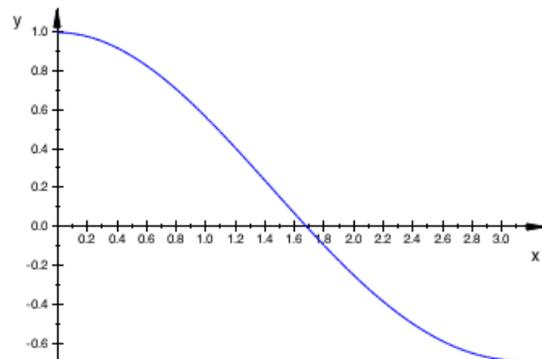
```
f(x) = f0(x) + 0.1 * f1(x);
```

$$f(x) = \{\cos(x) + 0.1 \cdot \sin(x) - 0.1 \cdot x \cdot \cos(x)\}$$

### Passo 3

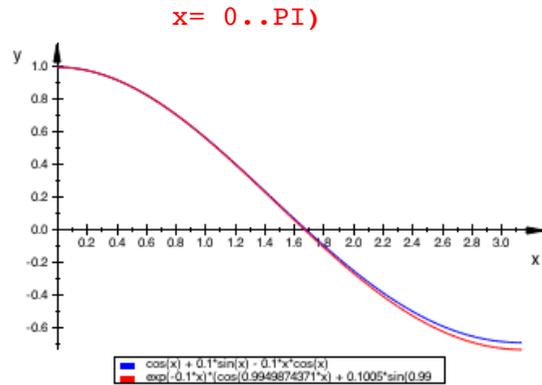
Stampa dei grafici della funzione  $f(x)$  approssimata al primo ordine, in vari intervalli:

```
plotfunc2d(cos(x) + 0.1 * (sin(x) - x * cos(x)), x = 0..PI)
```



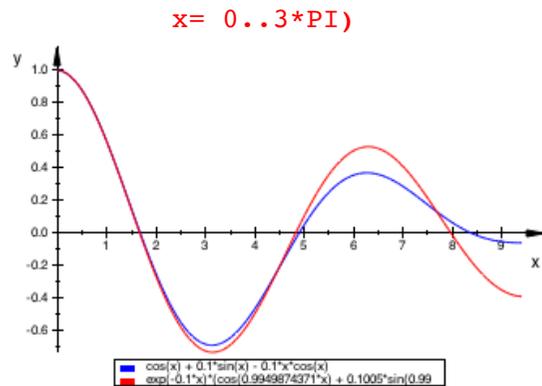
ed il confronto, nello stesso intervallo, tra tale soluzione, in blu, e la soluzione esatta, in rosso, cioè:

```
plotfunc2d(cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),
```



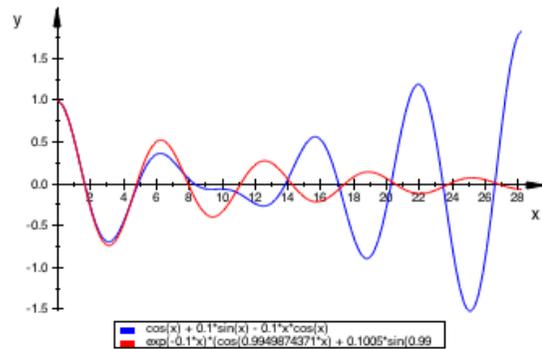
Come si vede, l'accordo tra le due soluzioni appare tanto migliore quanto più x è prossimo a zero. Scegliamo ora l'intervallo  $[0, 3\text{PI}]$

```
plotfunc2d(cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),
```



e poi l'intervallo  $[0, 9\text{PI}]$

```
plotfunc2d(cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),x=0..9*PI)
```



Si osserva che, per  $x$  tale che

$\varepsilon \cdot x = 1$ ; cioè,

$$\varepsilon = .1, x \approx 10 \implies \varepsilon \cdot x \approx 1$$

cioè  $x$  è di ordine  $1/\varepsilon$  e, quindi, il termine  $f_1(x)$  è dello stesso ordine del termine

$f_0(0)$  e, quindi, non rappresenta una 'piccola' correzione, corrispondentemente, osservo la crescita lineare della  $f_1(x)$  che non verifica la condizione di limitatezza

$$\forall x, \forall k, \exists M > 0 \text{ tale che } |f_k(x)| < M$$

sotto la quale lo sviluppo perturbativo è valido

```
x=0(1/ε);
```

$$x = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

la soluzione approssimata ha un comportamento completamente diverso da quella esatta. N.B. la soluzione approssimata ha ampiezza che cresce linearmente con x: inaccettabile poiché questo corrisponde ad energia crescente contrariamente al fatto che il sistema che si sta considerando è dissipativo (anche se debolmente).

Infine, confrontiamo la soluzione approssimata con quella esatta in corrispondenza ai due valori di epsilon nei casi

b) `epsilon=.01;`

$$\epsilon = 0.01$$

c) (attenzione 0.5 non è  $\ll 1$ !) `epsilon=.5;`

$$\epsilon = 0.5$$

b)

`ivp := ode({f''(x) + 2*0.01*f'(x) + f(x)=0, f(0) = 1, f'(0) = 0}, f(x))`

$$\text{ode}\left(\left\{\left\{f(0) = 1, f'(0) = 0, f(x) + 0.02 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)\right\}, f(x)\right\}\right)$$

la cui soluzione esatta, indicata con (3), è data da:

`Fes(x):=solve(ivp);`

$$\left\{0.01000050004 \cdot \sin(0.9999499987 \cdot x) \cdot e^{-0.01 \cdot x} + 1.0 \cdot \cos(0.9999499987 \cdot x) \cdot e^{-0.01 \cdot x}\right\}$$

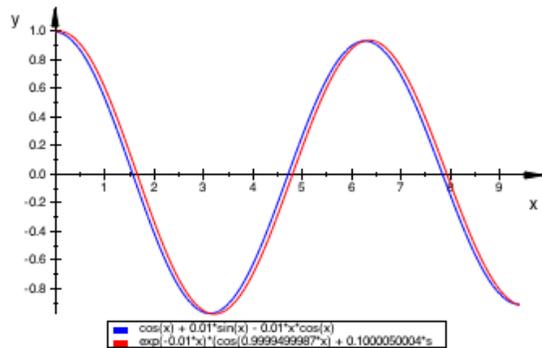
nella quale mettiamo in evidenza il termine esponenziale, ottenendo la

segunte, indicata con (4):

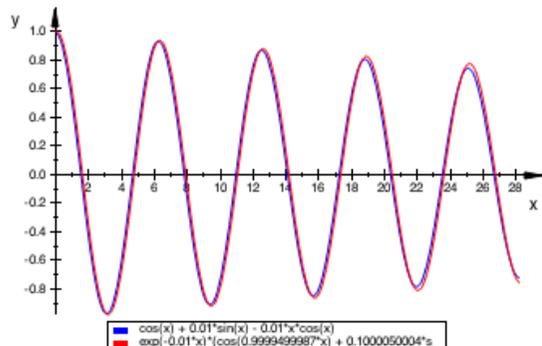
```
Fex(x):=simplify(%)
```

$$\left\{ e^{-0.01 \cdot x} \cdot (\cos(0.9999499987 \cdot x) + 0.01000050004 \cdot \sin(0.9999499987 \cdot x)) \right\}$$

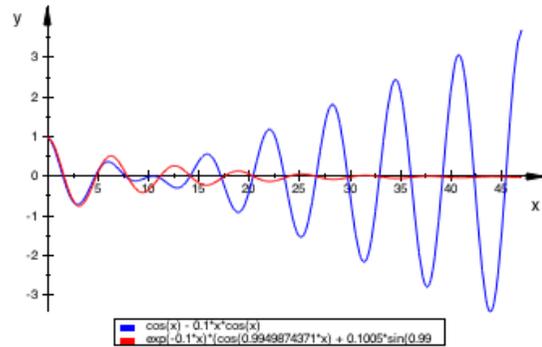
```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x= 0..3*PI
```



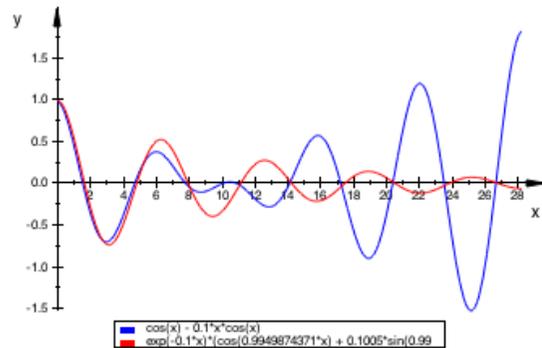
```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)), x= 0..9*
```



```
plotfunc2d(cos(x)-0.1*x*cos(x),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)), x= 0..15*PI)
```



```
plotfunc2d(cos(x)-0.1*x*cos(x),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)), x= 0..9*PI)
```



Naturalmente, un modo per migliorare l'approssimazione e` quello di calcolare termini successivi, cioe` non fermarsi all'ordine  $k=1$ , ma risolvere altri problemi: tutti del tipo:

```
ivpk := ode({fk'(x) + fk(x)=-2*(diff(f(k-1)(x), x)), fk(0) = 0, fk'(0) = 0}, fk(x));
```

$$\text{ode} \left( \left\{ \begin{array}{l} fk(0) = 0, \quad fk'(0) = 0, \quad fk(x) + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(k-1)(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(k)(x) \end{array} \right\}, fk(x) \right)$$

cioe` lineari (stesso operatore differenziale), con condizioni iniziali omogenee, non omogenei, nei quali il termine noto (forzante) e` legato alla soluzione del problema differenziale al passo precedente.

D'altra parte vediamo che l'accordo tra la soluzione esatta e quella ottenuta mediante il metodo perturbativo diretto (al primo ordine) quanto più  $x$  è prossimo a zero. Adesso vediamo qual'è l'andamento quando scegliamo

b)  $\epsilon = 0.01$

```
ivp := ode({f''(x) + 2*0.01*f'(x)+f(x)=0, f(0) = 1, f'(0) = 0}, f(x))
```

$$\text{ode}\left(\left\{f(0) = 1, f'(0) = 0, f(x) + 0.02 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x)\right\}, f(x)\right)$$

```
Fes(x):=solve(ivp);
```

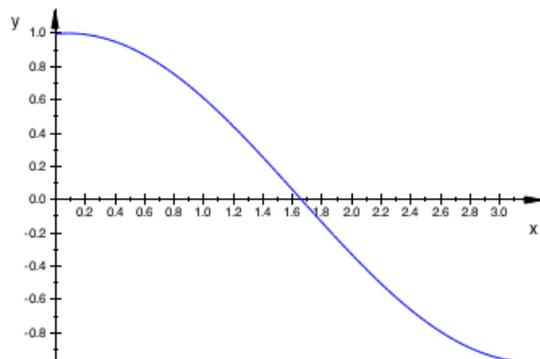
$$\left\{0.01000050004 \cdot \sin(0.9999499987 \cdot x) \cdot e^{-0.01 \cdot x} + 1.0 \cdot \cos(0.9999499987 \cdot x) \cdot e^{-0.01 \cdot x}\right\}$$

```
Fex(x):=simplify(%)
```

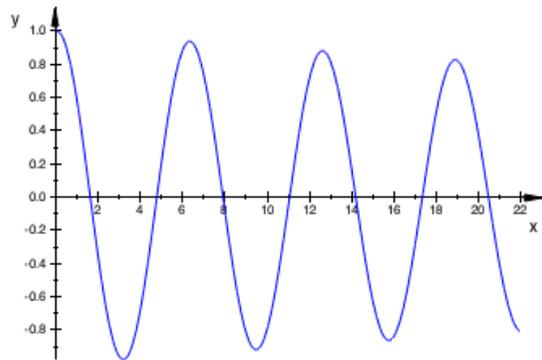
$$\left\{e^{-0.01 \cdot x} \cdot (\cos(0.9999499987 \cdot x) + 0.01000050004 \cdot \sin(0.9999499987 \cdot x))\right\}$$

il cui grafico è

```
plotfunc2d(exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x= 0..PI)
```



```
plotfunc2d(exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x= 0..7*PI)
```



nell'intervallo  $0..7*\text{PI}$ . Adesso confrontiamo tale soluzione con quella ottenuta mediante lo sviluppo perturbativo diretto.

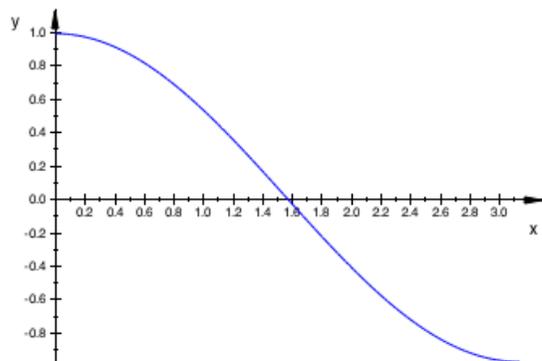
**Osservazione:** non abbiamo bisogno di calcolare nuovamente la soluzione perché i problemi ad ogni ordine sono indipendenti dal valore di epsilon.

Quindi, la soluzione approssimata al primo ordine è:

$$f(x, 0.1) = \cos(x) + 0.01 * (\sin(x) - x * \cos(x));$$

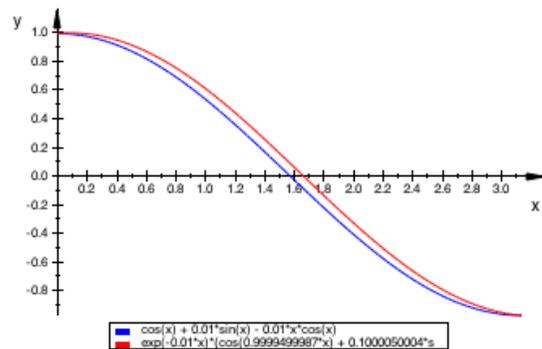
$$f(x, 0.1) = \cos(x) + 0.01 * \sin(x) - 0.01 * x * \cos(x)$$

`plotfunc2d(cos(x)+.01*(sin(x)-x*cos(x)), x= 0..PI)`



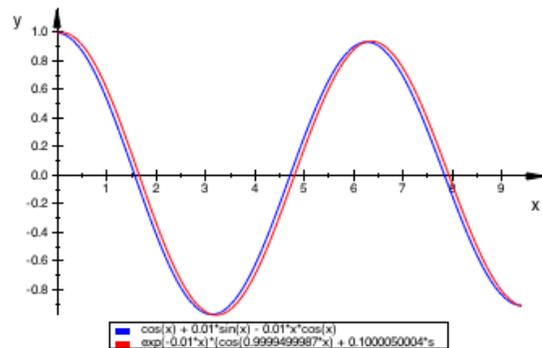
Ora confrontiamo l'andamento della soluzione esatta (in rosso) con quella approssimata al primo ordine (in blu) nell'intervallo  $[0, \pi]$  nel grafico seguente

```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x= 0..PI;
```



nell'intervallo  $[0, 3 \pi]$  nel grafico seguente

```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x= 0..3*PI;
```



nell'intervallo  $[0, 10 \pi]$  nel grafico seguente

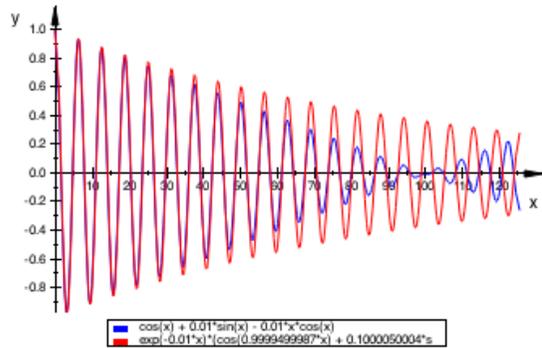
```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x= 0..10*PI;
```

nell'intervallo  $[0, 20 \pi]$  nel grafico seguente

`plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)), x= 0..20`

nell'intervallo  $[0, 40 \text{ PI}]$  nel grafico seguente

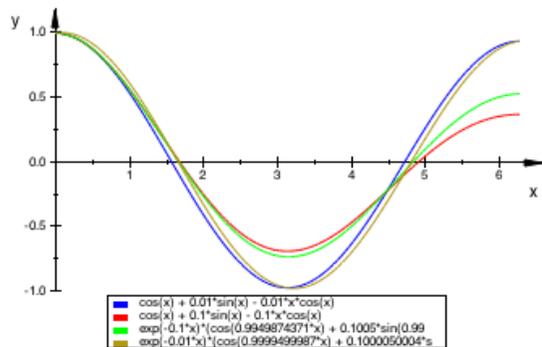
`plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)), x= 0..40`



in quest'ultimo grafico si raggiungono valori di  $x$  per i quali la soluzione al primo ordine (blu) non è accettabile.

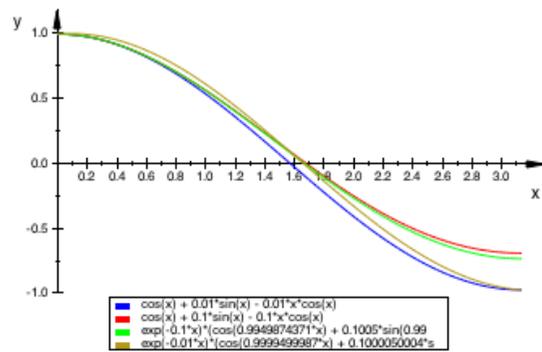
Confronto tra le soluzioni con i due diversi valori di epsilon

`plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)),x=0..2*PI)`



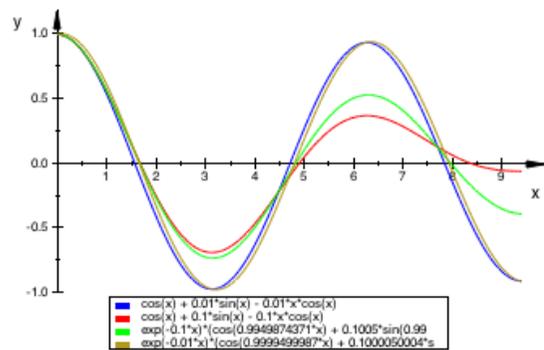
nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  le curve rossa e verde rappresentano, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatta per  $\epsilon=0.1$  mentre le curve blu e senape, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.01$

```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)), x=0..PI)
```



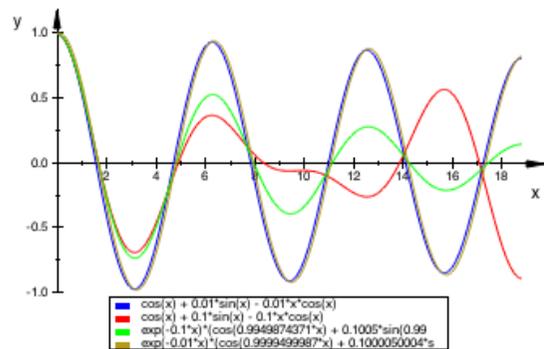
nell'intervallo  $[0, \pi]$  le curve rossa e verde rappresentano, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.1$  mentre le curve blu e senape, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.01$

```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)), x=0..3*PI)
```



nell'intervallo  $[0, 3\pi]$  le curve rossa e verde rappresentano, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.1$  mentre le curve blu e senape, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.01$

```
plotfunc2d(cos(x)+0.01*(sin(x)-x*cos(x)),cos(x)+0.1*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.1*x)*(cos(0.9949874371*x)+0.1005*sin(0.9949874371*x)),exp(-.01*x)*(cos(0.9999499987*x)+0.1000050004*sin(0.9999499987*x)), x=0..6*PI)
```



nell'intervallo  $[0, 6\pi]$  le curve rossa e verde rappresentano, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.1$  mentre le curve blu e senape, rispettivamente, le soluzioni approssimate ed esatte per  $\epsilon=0.01$ .

Si nota, dal confronto tra il grafico della soluzione approssimata (blu) e quello della corrispondente soluzione esatta (senape), che, quando  $\epsilon=0.01$ , la differenza tra le due soluzioni è percentualmente limitata. Al contrario, dal confronto tra il grafico della soluzione approssimata (rossa) e quello della

corrispondente soluzione esatta (verde), che, quando  $\epsilon=0.1$ , la differenza tra le due soluzioni è crescente al variare di  $x$  ed è di ordine 1 per

$$\epsilon x \approx O(1)$$

Ultimo caso c) `ε=.5;`

$$\epsilon = 0.5$$

Innanzitutto, devo calcolare la soluzione esatta

`delete f;`

`ivp := ode({f''(x) + 2*0.5*f'(x) + f(x)=0, f(0) = 1, f'(0) = 0}, f(x));`

$$\text{ode} \left( \left\{ f(0) = 1, f'(0) = 0, f(x) + 1.0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \right\}, f(x) \right)$$

`float(sqrt(3)/2);`

`0.8660254038`

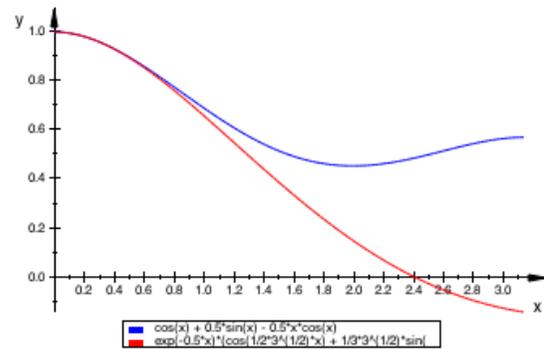
`f:=expand(solve(ivp));`

$$\left\{ \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{3} \cdot x}{2}\right)}{\sqrt{e^x}} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3} \cdot x}{2}\right)}{3 \cdot \sqrt{e^x}} \right\}$$

Invece, per ottenere quella approssimata, devo solo sostituire ad epsilon il valore 0.5.

Otengo

`plotfunc2d(cos(x)+0.5*(sin(x)-x*cos(x)),exp(-.5*x)*(cos((sqrt(3)/2)*x)+(sqrt(3)/3)*sin((sqrt(3)/2)*x)), x= 0..PI)`



Come previsto, dal confronto tra il grafico della soluzione approssimata (blu) e quello della corrispondente soluzione esatta (rossa), che, quando  $\epsilon=0.5$ , la differenza tra le due soluzioni è percentualmente elevata già per  $x$  dell'ordine di  $\pi/2$ . D'altra parte, come già osservato, **.5 non è  $\ll 1$**