

Metodi Numerici con elementi di Programmazione

(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Sistemi lineari

Introduzione e Metodi diretti

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

<http://ingaero.uniroma1.it/>

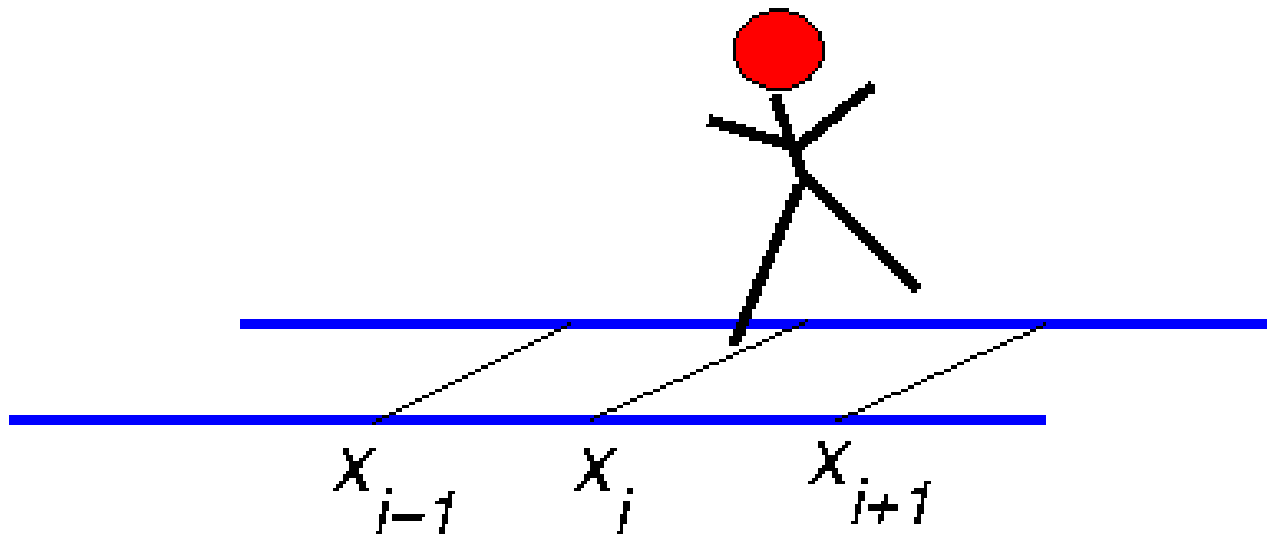
nella pagina dedicata al corso [Metodi Numerici con elementi di Programmazione](#)

Sistemi di equazioni lineari

Esempio 1

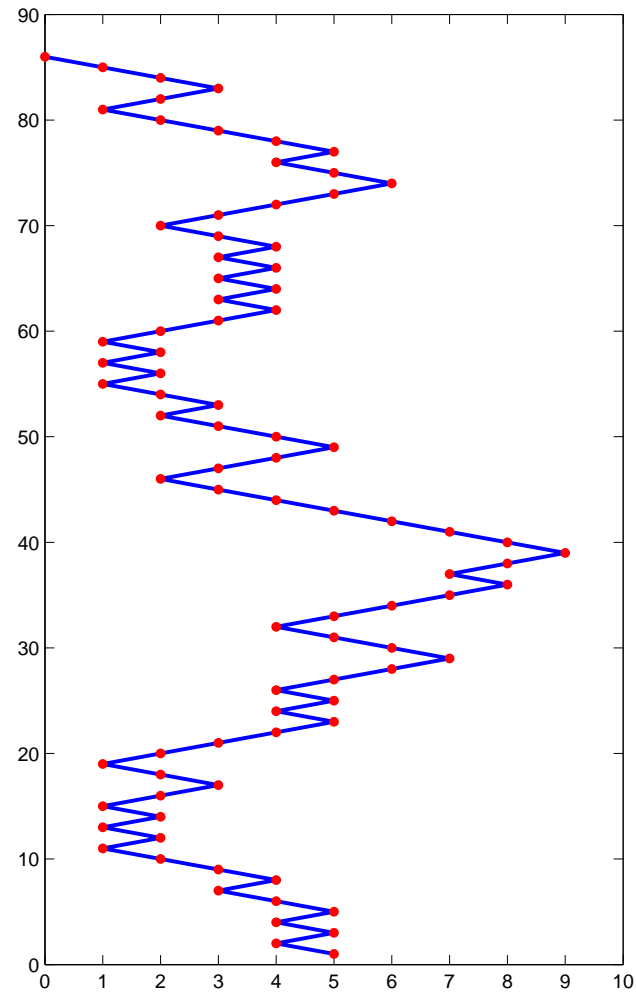
Un ubriaco compie una **passeggiata casuale**, facendo un passo a sinistra o a destra a caso lungo una strada rettilinea. Quando raggiunge una estremità della strada, si ferma.

Calcolare la **probabilità** che l'ubriaco raggiunga l'estremità sinistra della strada partendo dalla posizione i .



Esempio di passeggiata per $N = 10$

Si può simulare una **passeggiata casuale** tirando una moneta.



Punto di partenza: x_5

Soluzione

La **probabilità** p_i , $i = 0, 1, \dots, N$, di raggiungere l'estremo sinistro partendo dalla posizione i , soddisfa la relazione

$$\begin{cases} p_0 = 1 & p_N = 0 \\ p_i = \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i+1} & i = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

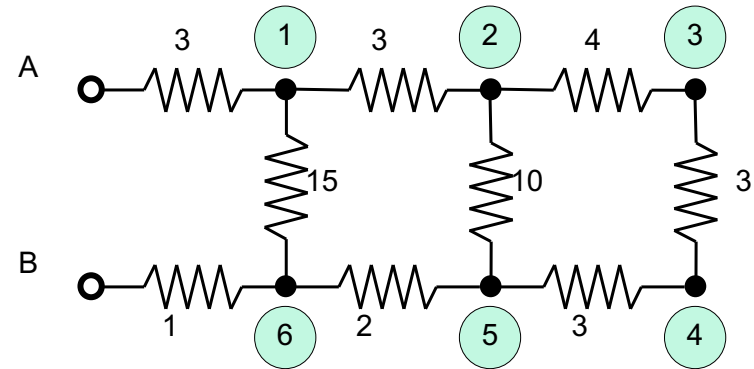
Si tratta di un **sistema lineare tridiagonale** nelle incognite

$$p_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$\begin{cases} p_1 - \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}p_1 + p_2 - \frac{1}{2}p_3 = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}p_{N-3} + p_{N-2} - \frac{1}{2}p_{N-1} = 0 \\ -\frac{1}{2}p_{N-2} + p_{N-1} = 0 \end{cases}$$

Esempio 2

Determinare i potenziali nei nodi 1 – 6 del circuito sapendo che tra A e B è applicata una differenza di potenziale pari a 100V (le resistenze sono misurate in *Ohm*)



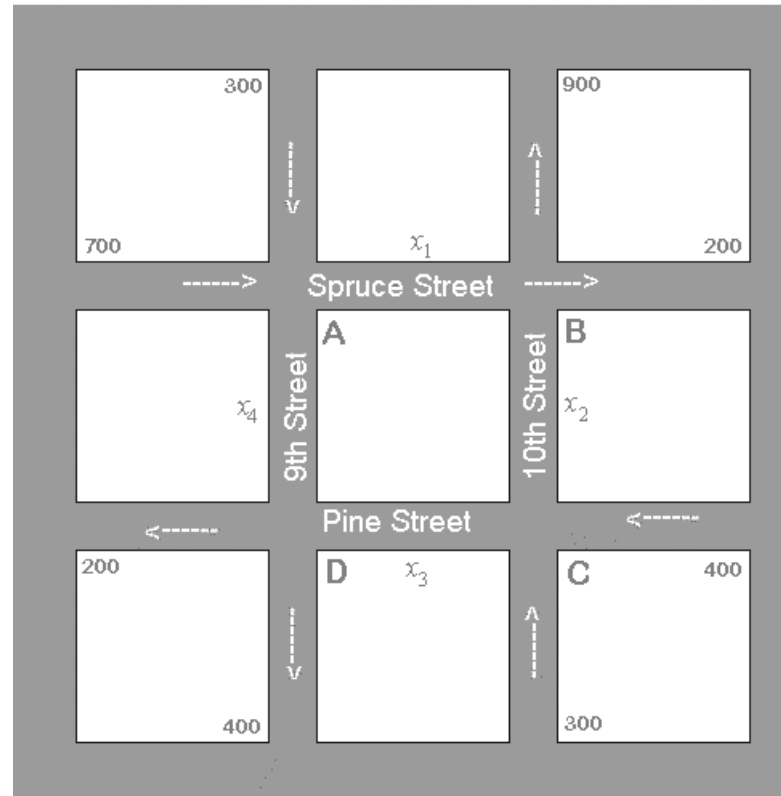
Soluzione

Applicando la **legge di Ohm** $\Delta V = RI$ e la **legge di Kirchhoff** $\sum_i I_i = 0$ in ogni nodo si ottiene il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} 11v_1 & -5v_2 & & & & -v_6 & = & 500 \\ -20v_1 & +41v_2 & -15v_3 & & -6v_5 & & = & 0 \\ & -3v_2 & +7v_3 & -4v_4 & & & = & 0 \\ & & -v_3 & +2v_4 & -v_5 & & = & 0 \\ & -3v_2 & & -10v_4 & +28v_5 & -15v_6 & = & 0 \\ -2v_1 & & & & -15v_5 & +47v_6 & = & 0 \end{array} \right.$$

Esempio 3

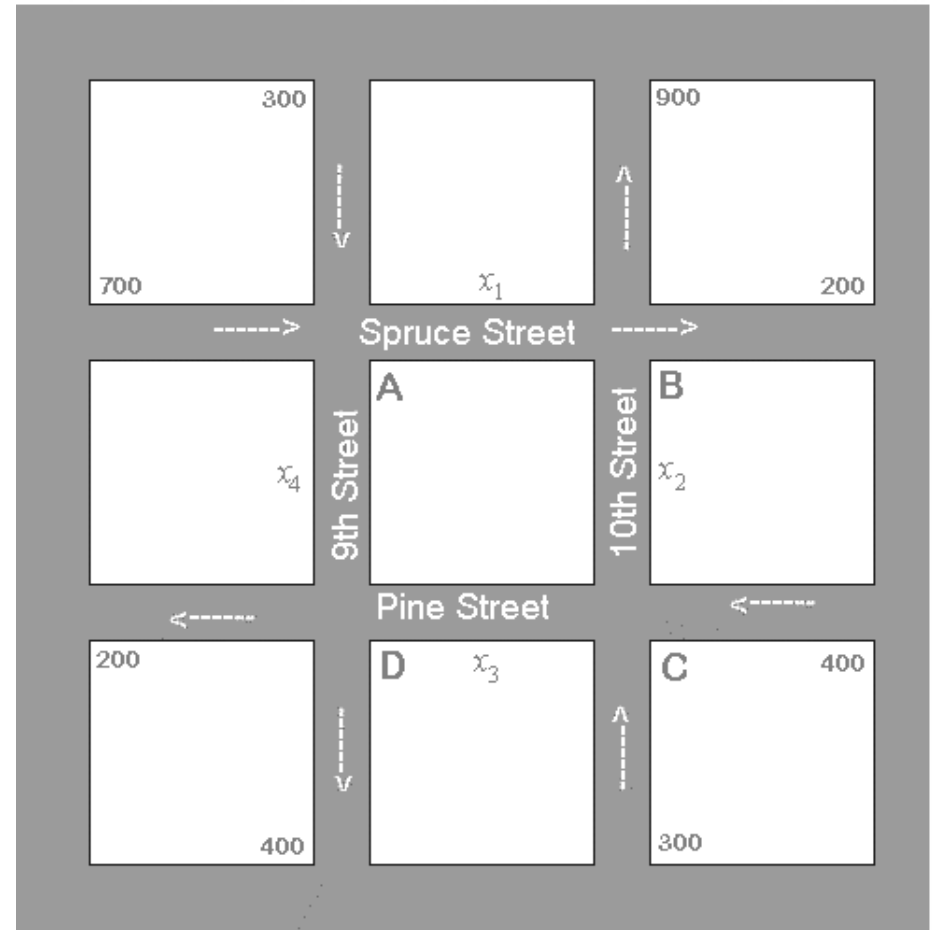
Nelle ore di punta il **traffico è congestionato** in corrispondenza degli incroci rappresentati nella figura di seguito



Tutte le strade sono a senso unico e la direzione di circolazione è indicata dalle frecce.

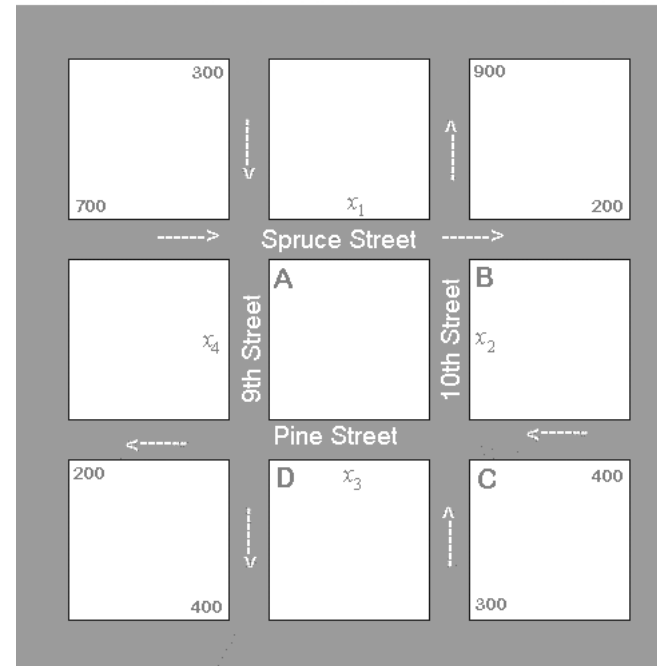
Inoltre:

1. **Incrocio A**: 700 macchine ogni ora provengono da Spruce Street mentre 300 provengono da 9th Street
2. **Incrocio B**: 200 macchine ogni ora attraversano l'incrocio B provengono da Spruce Street mentre 900 provengono da 10th Street.
3. **Incrocio C**: 400 macchine ogni ora entrano in Pine Street attraverso l'incrocio C mentre 300 provengono da 10th Street.
4. **Incrocio D**: 200 macchine ogni ora lasciano l'incrocio D in direzione Pine Street mentre 400 in direzione 9th Street fino all'incrocio A.



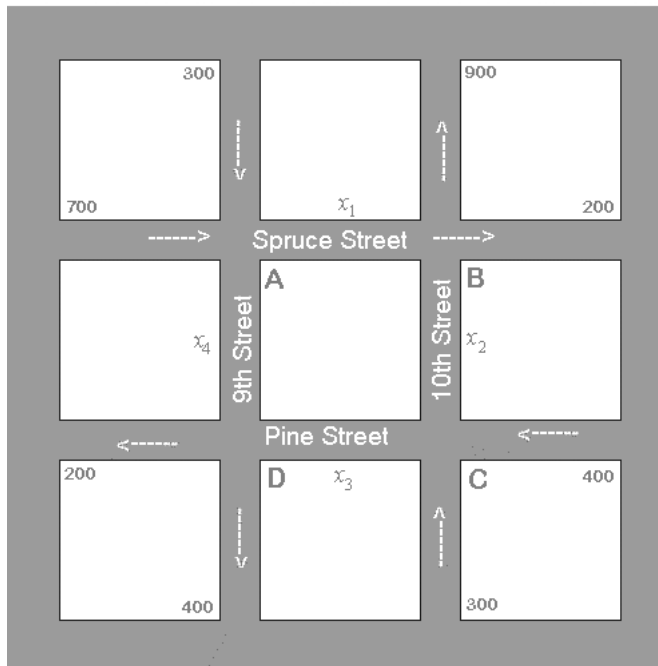
Indicando con

- x_1 il numero di macchine che lascia l'incrocio A percorrendo Spruce Street verso l'incrocio B ;
- x_2 il numero di macchine che arriva all'incrocio B percorrendo 10th Street dall'incrocio C;
- x_3 il numero di macchine che lascia l'incrocio C percorrendo Pine Street verso l'incrocio D;
- x_4 il numero di macchine che arriva all'incrocio D percorrendo 9th Street dall'incrocio A.



Assumendo che

1. per velocizzare il flusso del traffico ogni macchina che arriva ad un certo incrocio deve anche lasciarlo;
2. tutte le strade sono a senso unico
3. x_1, x_2, x_3 e x_4 sono numeri positivi



Si ha

Incrocio A

$$x_1 + x_4 = 700 + 300$$

Incrocio B

$$x_1 + x_2 = 900 + 200$$

Incrocio C

$$x_2 + x_3 = 400 + 300$$

Incrocio D

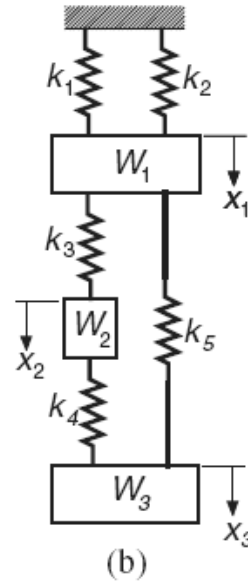
$$x_3 + x_4 = 400 + 200$$

Cioè è necessario risolvere il seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1 & + & & & x_4 & = & 1000 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1100 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 700 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 600 \end{array} \right.$$

Esempio 4

Il sistema in figura



è costituito da 4 molle che sostengono 3 pesi $W_i, i = 1, \dots, 3$ e all'equilibrio soddisfa

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 + k_3 + k_5)x_1 & -k_3 x_2 & -k_5 x_3 & = W_1 \\ -k_3 x_1 & +(k_3 + k_4) x_2 & -k_4 x_3 & = W_2 \\ -k_5 x_1 & -k_4 x_2 + & (k_4 + k_5) x_3 & = W_3 \end{cases}$$

con k_i costante elastica della molla i -esima e x_j spostamento della massa j -esima rispetto alla posizione nel sistema non deformato.

Esempio 5

Punto di intersezione tra due rette

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

rette coincidenti

infinite soluzioni

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

rette parallele

non esistono soluzioni

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

rette incidenti

unica soluzione

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Metodi diretti per la soluzione di sistemi lineari

Sistema lineare $AX = B$

A = matrice dei coefficienti X = vettore delle incognite

B = vettore dei termini noti

- I **metodi diretti** sono basati sulla **trasformazione** del sistema di partenza in uno **equivalente** che abbia una struttura particolarmente **semplice** per cui è facile calcolarne la soluzione.
- La **soluzione numerica** viene calcolata in un **numero finito** di passi e, se non vi fossero errori di arrotondamento nei dati o durante i calcoli, la soluzione numerica sarebbe **esatta**.
- Data l'**occupazione di memoria** (RAM) richiesta nei passaggi dell'algoritmo, vengono utilizzati quando la **matrice dei coefficienti ha dimensione non "troppo" elevata**.

Costo computazionale di un algoritmo

Prima di implementare un algoritmo bisogna stimare il suo **costo computazionale**, cioè il numero di **operazioni pesanti** (moltiplicazioni o divisioni) necessarie per calcolare **numericamente** la soluzione.

Costo computazionale:

$C_c \approx$ numero di moltiplicazioni o divisioni

Richiami sul determinante di matrici

- Se A è una matrice di dimensione 1×1 con $a_{11} = a$, $\det(A) = a$

- Se A è una matrice di dimensione $n \times n$, allora

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

oppure $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$

con M_{ij} il determinante della matrice A di cui si trascurano la i -esima riga e la j -esima colonna

- Se A è una matrice quadrata di dimensione n :
 1. Se una riga o una colonna di A ha tutti gli elementi nulli, allora $\det(A) = 0$

2. Se A ha due righe o due colonne con gli stessi elementi, allora $\det(A) = 0$
3. Se \tilde{A} è ottenuta scambiando due delle righe di A allora $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$
4. Se \tilde{A} è ottenuta moltiplicando una riga di A per lo scalare λ , allora $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$
5. Se \tilde{A} è ottenuta sommando ad una riga di A un'altra riga moltiplicata per lo scalare λ , allora $\det(\tilde{A}) = \det(A)$
6. Se B è una matrice quadrata di ordine n , allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
7. $\det(A^T) = \det(A)$
8. Se esiste A^{-1} , allora $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
9. Se A è una matrice triangolare superiore (o inferiore), allora $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

Metodo di Cramer

Dall'**Algebra** sappiamo che la soluzione **esatta** di un sistema lineare si può ottenere con il **metodo di Cramer**.

Se A è **regolare**, allora

$$X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{D_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove D_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo alla colonna i -esima il vettore B .

Esempio: Calcolare la soluzione del sistema $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + 84 + 96 - 105 - 0 - 48 = 27 \neq 0$$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 24 - 30 - 48 = -54 \quad x_1 = \frac{D_1}{\det(A)} = \frac{-54}{27} = -2$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 42 + 24 - 12 = 54 \quad x_2 = \frac{D_2}{\det(A)} = \frac{54}{27} = 2$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 10 + 32 - 35 - 16 = -9 \quad x_3 = \frac{D_3}{\det(A)} = \frac{-9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{e quindi } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Costo computazionale del metodo di Cramer

$$x_i = \frac{D_i}{\det A} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- $n + 1$ **determinanti** (D_i , $i = 1, \dots, n$ e $\det A$)
- $n!$ **prodotti** per ciascun determinante
- $n - 1$ **moltiplicazioni** per ciascun prodotto
- $+ n$ **divisioni** (trascurabili)

Costo computazionale: $C_c = (n + 1)n!(n - 1) + n \simeq (n + 1)n!(n - 1)$

$n = 15 \rightarrow C_c \simeq 3 \cdot 10^{14}$ moltiplicazioni $\rightarrow 3$ giorni
 $n = 20 \rightarrow C_c \simeq 3 \cdot 10^{21}$ moltiplicazioni $\rightarrow 3 \cdot 10^5$ anni } **Inutilizzabile!!**

(supponendo 10^{-9} secondi per operazione)

Calcolo dell'inversa di A

$$X = A^{-1}B$$

Si tratta di trovare la matrice M tale che

$$AM = I$$

con I la matrice identità .

Corrisponde alla soluzione di **tre sistemi lineari** ognuno dei quali ha A come matrice dei coefficienti, una colonna di I come vettore dei termini noti e una colonna di M come incognita.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Il **metodo di eliminazione di Gauss** trasforma, in $n-1$ passi, il sistema lineare

$$AX = B \quad X, B \in \mathbf{R}^n \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

con matrice dei coefficienti A "**piena**", nel sistema **equivalente**

$$UX = \tilde{B} \quad X, \tilde{B} \in \mathbf{R}^n \quad U \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

con matrice dei coefficienti U **triangolare superiore**.

Il metodo utilizza le seguenti **operazioni** "*lecite*":

- **scambio** di 2 equazioni
- **somma** di due equazioni di cui una è **moltiplicata** per una costante

Soluzione di sistemi triangolari

Sistemi triangolari superiori

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1k}x_k + \dots + u_{1n}x_n = b_1 \\ \quad u_{22}x_2 + \dots + u_{2k}x_k + \dots + u_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad u_{kk}x_k + \dots + u_{kn}x_n = b_k \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$



$$UX = B \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_k = \left(b_k - \sum_{i=k+1}^n u_{ki}x_i \right) \frac{1}{u_{kk}}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 2, 1 \end{array} \right.$$

(**Algoritmo di sostituzione all'indietro**)

Sistemi triangolari inferiori

$$\begin{cases} l_{11}x_1 = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ l_{k1}x_1 + l_{k2}x_2 + \dots + l_{kk}x_k = b_k \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \dots + l_{nk}x_k + \dots + l_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$



$$LX = B \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \\ x_k = \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}x_i \right) \frac{1}{l_{kk}} \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(**Algoritmo di sostituzione in avanti**)

Nota: Se le matrici U e L sono **regolari**, sicuramente u_{kk} e l_{kk} sono $\neq 0$.

Costo computazionale

Algoritmo di sostituzione

Ad ogni passo ci sono

- $n - k$ **moltiplicazioni**
- **1** **divisione**

$$C_c = \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \simeq \frac{n^2}{2}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Per risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + = 2 \end{cases}$$

si considerano la matrice **A** e il termine noto **b** associati ad esso

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Si moltiplica la prima riga per 4 e si sottrae alla seconda, annullando così il secondo elemento della prima colonna di A .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 7 & 8 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Si moltiplica la prima riga per 7 e si sottrae alla terza, annullando il terzo elemento della prima colonna di A .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -5 \end{array} \right)$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Si moltiplica la seconda riga per $6/3$ e si sottrae alla terza, annullando il terzo elemento della seconda colonna di A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array} \right)$$

Si ottiene un sistema equivalente a quello dato in cui la matrice dei coefficienti è triangolare superiore

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 6x_3 = -4 \\ -9x_3 = 3 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Il sistema in questa forma diventa di facile soluzione.

Infatti, partendo dall'ultima equazione, si ha

$$\begin{aligned}x_3 &= -3/9 = -1/3 \\x_2 &= (-4 + 6x_3)/(-3) = 2 \\x_1 &= 1 - 3x_3 - 2x_2 = 1 + 1 - 4 = -2\end{aligned}$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Generalizzando, se la matrice A è tale che $a_{ii} \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

I passo : annullare gli elementi della prima colonna di A al di sotto della diagonale principale

I.1 sottrarre alla seconda equazione la prima moltiplicata per $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$

I.2 sottrarre alla terza equazione la prima moltiplicata per $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$

⋮

⋮

I.n-1 sottrarre alla $n - \text{esima}$ equazione la prima moltiplicata per $m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$

Al termine di questo passo si ottiene un sistema equivalente con matrice dei coefficienti

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad i = 2, \dots, n \quad j = 1, \dots, n$$

e vettore dei termini noti

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$b_i^{(1)} = b_i - m_{i1}b_1, \quad i = 2, \dots, n$$

II passo : annullare gli elementi della seconda colonna di $A^{(1)}$ al di sotto della diagonale principale

II.1 sottrarre alla terza equazione la seconda moltiplicata per $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

II.2 sottrarre alla quarta equazione la seconda moltiplicata per $m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

⋮

⋮

II.n-2 sottrarre alla n -esima equazione la seconda moltiplicata per $m_{n2} = \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

Al termine di questo passo si ottiene un sistema equivalente con

matrice dei coefficienti

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

dove

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)}, \quad i = 3, \dots, n \quad j = 2, \dots, n$$

e vettore dei termini noti

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

dove

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)}, \quad i = 3, \dots, n$$

⋮

⋮

n-1 passo : annullare gli elementi della $(n - 1) - \text{esima}$ colonna di $A^{(n-2)}$ al di sotto della diagonale principale

II.1 sottrarre alla $n - \text{esima}$ equazione la $(n - 1) - \text{esima}$ moltiplicata per $m_{n \ n-1} = \frac{a_{n \ n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1 \ n-1}^{(n-2)}}$

Al termine di questo passo si ottiene un sistema equivalente con matrice dei coefficienti

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$a_{ij}^{(n-1)} = a_{ij}^{(n-2)} - m_{i \ n-1} a_{n-1 \ j}^{(n-2)}, \quad i = n \quad j = n - 1, \dots, n$$

e vettore dei termini noti

$$b^{(n-1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

dove

$$b_i^{(n-1)} = b_i^{(n-1)} - m_{i \ n-1} b_{n-1}^{(n-1)}, \quad i = n$$

Metodo di eliminazione di Gauss

Quindi, dopo $n - 1$ passi il sistema $Ax = b$ è stato trasformato nel sistema equivalente $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$, con $A^{(n-1)}$ matrice triangolare superiore

al passo k si definiscono gli elementi

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}, \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = k, k + 1, \dots, n$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik}b_k^{(k-1)}, \quad i = k + 1, \dots, n$$

$$\text{con } m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Costo computazionale

Metodo di eliminazione di Gauss:

- triangolarizzazione $\simeq \frac{n^3}{3}$. Infatti:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}}_{\text{ognipasso}} \underbrace{\sum_{l=i+1}^n}_{\text{righe}} (\underbrace{1}_{\text{div.}} + \underbrace{n-i+2}_{\text{molt.}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(n+3-i) \simeq \frac{n^3}{3}$$

Sono state usate le seguenti identità :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- sostituzione all'indietro $\simeq \frac{n^2}{2}$

$$\Rightarrow C_c \simeq \frac{n^3}{3}$$

Esercizio

Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \end{cases}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss

Fattorizzazione LU

Il **metodo di eliminazione di Gauss** può essere interpretato come la **fattorizzazione** della matrice di partenza A nel prodotto di due matrici triangolari.

Teorema. Se la matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ha **determinanti principali di testa** tali che

$$\det A_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

allora

$$A = LU$$

dove $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una **matrice triangolare inferiore** con elementi diagonali pari a 1 e $U \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una **matrice triangolare superiore**.

Infatti, riprendendo l'esempio precedente in cui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Moltiplicare per 4 la prima riga e sottrarla alla seconda e moltiplicare la prima riga per 7 e sottrarla alla terza equivale a moltiplicare a destra la matrice A per la matrice

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare la seconda riga della matrice ottenuta al passo precedente per 2 e sottrarla alla terza equivale a moltiplicare a destra la matrice L_1A per la matrice

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Ma allora la matrice triangolare superiore U ottenuta precedentemente con il metodo di eliminazione di Gauss è tale che

$$L_2 L_1 A = U$$

e quindi

$$A = (L_2 L_1)^{-1} U = L_1^{-1} L_2^{-1} U = LU$$

Si verifica facilmente che $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Struttura delle matrici L e U

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & \vdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Nota 1: Se A non soddisfa le ipotesi $\det A_k \neq 0$, ma è comunque **regolare**, tramite **scambi di righe** può essere riportata ad una matrice che soddisfa le ipotesi e che quindi può essere **fattorizzata**.

Nota 2: il **costo computazionale** della fattorizzazione è lo stesso di

quello dell'eliminazione di Gauss $C_c \simeq \frac{n^3}{3}$.

Applicazioni della fattorizzazione

Soluzione di un sistema lineare

Consideriamo il **sistema lineare** $AX = B$ e supponiamo che la matrice dei coefficienti A possa essere **fattorizzata**.

$$AX = B \xrightarrow{A=LU} L\underbrace{UX}_Y = B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} LY = B & \text{sist. triang. inf. sost. in avanti} \\ UX = Y & \text{sistema triang. sup. sost. all'indietro} \end{cases}$$

Una volta **fattorizzata** A ,

la soluzione del sistema si ottiene risolvendo i due sistemi triangolari con **costo computazionale** $2\frac{n^2}{2}$.

Soluzione di piú sistemi lineari

Se dobbiamo risolvere piú sistemi lineari

$$AX_i = B_i \quad i = 1, 2, \dots, r$$

aventi la **stessa matrice** A e **diversi termini noti**, si fattorizza una volta per tutte la matrice $A = LU$ e si risolvono, per ogni vettore B_i , i due sistemi triangolari

$$\begin{cases} LY_i = B_i & i = 1, 2, \dots, r \\ UX_i = Y_i \end{cases}$$

per la soluzione dei quali il **costo computazionale** è "solo" n^2 .

Calcolo del determinante di A

$$\det A = \det(L U) = \det L \det U = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n l_{kk} \right)}_{\text{Teorema di Binet}} \left(\prod_{k=1}^n u_{kk} \right) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \searrow \\ \text{Teorema di Binet} & & = 1 \end{array}$$

Se durante la fattorizzazione sono stati fatti s **scambi** di righe, allora

$$\det A = (-1)^s a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)}$$

Calcolo dell'inversa di A

La matrice inversa A^{-1} di una matrice **regolare** A è la matrice tale che

$$A A^{-1} = I \quad I : \text{matrice identità}$$

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [E_1 \ E_2 \ \cdots \ E_n] \quad E_i = [0, 0, \cdots, \underbrace{1}_i, 0, \cdots, 0]^T$$

↓
Vettori della **base canonica**

$$A A^{-1} = I \Rightarrow A X_i = E_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \Rightarrow A^{-1} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n]$$

Una volta nota la **fattorizzazione** di A , basta risolvere gli n sistemi

$$L Y_i = E_i, \quad U X_i = Y_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\text{Costo computazionale: } C_c \simeq \frac{n^3}{3} + n \cdot n^2 = \frac{4}{3} n^3$$

Calcolo del rango di A

- Se l'algoritmo di eliminazione applicato alla **matrice quadrata** $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ termina regolarmente dopo $n - 1$ passi \Rightarrow la matrice A ha **rango massimo** pari a n (**matrice regolare**).
- Se l'algoritmo di eliminazione applicato alla **matrice quadrata** $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ non può proseguire dopo q passi perchè $a_{rk}^{(k)} = 0, r = k, \dots, n \Rightarrow$ la matrice A ha **rango** pari a $q \leq n$ (**matrice singolare**).
- L'algoritmo di eliminazione applicato alla **matrice rettangolare** $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ termina necessariamente dopo $q \leq m$ passi \Rightarrow la matrice A ha **rango** pari a q .

Nota: le operazioni "lecite" conservano il rango.

Metodo di eliminazione di Gauss

Nel **metodo di Gauss**, come anche nella **fattorizzazione LU**, si richiedono divisioni per gli elementi della diagonale principale della matrice considerata. Se questi ultimi sono prossimi allo zero, la soluzione può non essere esatta a causa della **cancellazione numerica**.

Esempio: Supponiamo di dover risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} -0.0590x_1 + 0.2372x_2 = -0.3528 \\ 0.1080x_1 - 0.4348x_2 = 0.6452 \end{cases}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss e 4 decimali significativi.

Metodo di eliminazione di Gauss

Il rapporto

$$\frac{0.1080}{-0.0590} \approx -1.830508 \approx -1.831$$

moltiplicando questa quantità con la prima equazione del sistema e sottraendo alla seconda, il secondo elemento della seconda colonna diventa

$$-0.4348 - 0.2372(-1.831) = -0.4348 + 0.4343 = -0.0005$$

Mentre il secondo elemento del termine noto è

$$0.6452 - 0.3528(-1.831) = 0.6452 - 0.6460 = -0.0008$$

Metodo di eliminazione di Gauss

e quindi

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.0590 & 0.2372 & -0.3528 \\ 0 & -0.0005 & -0.0008 \end{array} \right)$$

da cui

$$x_2 = \frac{0.0008}{0.0005} = 1.6$$

$$x_1 = \frac{-0.3528 - 1.6(0.2372)}{-0.0590} = \frac{0.7323}{0.0590} = 12.41$$

Mentre la soluzione esatta è

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 10$$

Metodo di eliminazione di Gauss: pivoting parziale

Non si ha cancellazione numerica se si **scambiano le equazioni del sistema**, cioè

$$\begin{cases} 0.1080x_1 - 0.4348x_2 = 0.6452 \\ -0.0590x_1 + 0.2372x_2 = -0.3528 \end{cases}$$

Eseguendo un passo del metodo di eliminazione di Gauss, il sistema si riduce al sistema equivalente

$$\begin{cases} 0.1080x_1 - 0.4348x_2 = 0.6452 \\ 0x_1 + 0.3296x_2 = 0.3296 \end{cases}$$

da cui

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 10$$

Pivoting parziale

Ad ogni passo k del metodo di eliminazione di Gauss si individua il valore $r \geq k$ per cui risulta

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq s \leq n} |a_{sk}^{(k)}|,$$

dove $a_{ij}^{(k)}$ sono gli elementi della matrice del sistema al passo k ,

e si scambiano le righe r e k

Matrici tridiagonali

Nel caso in cui la matrice dei coefficienti A è **tridiagonale** la **fattorizzazione LU** è molto **semplice** in quanto le matrici L e U hanno una struttura semplice.

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & d_2 & s_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{bmatrix} = LU$$

Algoritmo di Thomas

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = d_1 \\ v_i = s_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \alpha_i = a_i/u_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, n \\ u_i = d_i - \alpha_i v_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, n \end{array} \right.$$

Costo computazionale: $C_c = 2n - 2$

Soluzione del sistema lineare $AX = B$

$$y_1 = b_1 \quad y_i = b_i - \alpha_i y_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$x_n = y_n/u_n \quad x_i = (y_i - v_i x_{i+1})/u_i \quad i = n-1, \dots, 1$$

Costo computazionale: $C_c = \underbrace{(n-1)}_{\text{moltiplicazioni}} + \underbrace{(n-1)}_{\text{moltiplicazioni}} + \underbrace{n}_{\text{divisioni}} = 3n - 2$

Esempio 1: soluzione

La **soluzione esatta** è $\bar{X} = [\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_N]^T$, dove $\bar{p}_i = 1 - \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$.

Algoritmo di **eliminazione di Gauss**

N	$\ \bar{X} - X\ _\infty$	tempo di calcolo	occupazione di memoria
11	3.33e-016	0.000304 s	0.8 Kbyte
21	1.55e-015	0.000356 s	3.2 Kbyte
51	4.16e-015	0.000402 s	20 Kbyte
101	2.14e-014	0.001555 s	8 Kbyte
501	1.11e-013	0.070898 s	200 Kbyte
5001	1.84e-012	29.306639 s	2 Mbyte
10001	1.38e-011	225.971643 s	800 Mbyte

Algoritmo di **Thomas**

N	$\ \bar{X} - X\ _\infty$	tempo di calcolo	occupazione di memoria
11	1.11e-016	0.000061 s	624 bytes
21	1.11e-016	0.000089 s	1376 bytes
51	4.33e-015	0.000179 s	3536 bytes
101	9.10e-015	0.000454 s	7136 bytes
501	4.61e-014	0.002566 s	35936 bytes
5001	3.20e-012	0.093172 s	359936 bytes
10001	6.95e-012	0.364083 s	719936 bytes

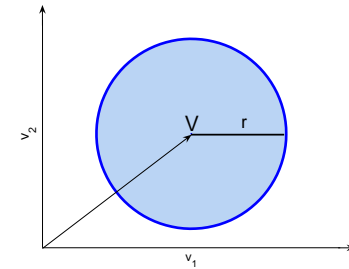
Si osserva una notevole riduzione del tempo di calcolo, una discreta riduzione della memoria occupata e una maggiore precisione nella soluzione prodotta.

Norma di vettore

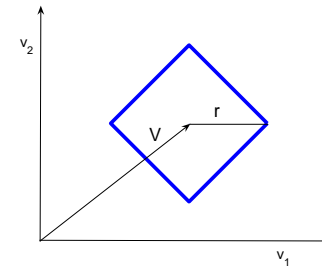
La **norma** di un vettore $V = [v_1, \dots, v_n]^T$ viene utilizzata per "*misurare*" la sua **lunghezza**.

Intorno: $\|V - W\| \leq r$

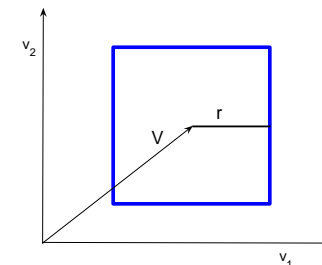
- **Norma due o euclidea:** $\|V\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$



- **Norma uno:** $\|V\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$



- **Norma infinito:** $\|V\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$



Nota. Tutte le norme sono **equivalenti**: $m\|V\|_p \leq \|V\|_q \leq M\|V\|_p$

Proprietà della norma di vettore

- $\|V\| \geq 0$, $\|V\| = 0 \iff V = 0$
- $\|\alpha V\| = |\alpha| \cdot \|V\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall V \in \mathbf{R}^n$
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall V, W \in \mathbf{R}^n$ (*disuguaglianza triangolare*)

Distanza: in uno **spazio vettoriale normato** S è possibile introdurre la **distanza** tra due punti V e W in S

$$d(V, W) := \|V - W\|$$

Proprietà della distanza:

- $d(V, W) = 0 \iff V = W$
- $d(V, W) = d(W, V) \quad \forall V, W \in S$
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W) \quad \forall V, W, Z \in S$

Norme di matrici

La **norma** di una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ soddisfa le seguenti

Proprietà

- $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (*disuguaglianza triangolare*)
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$

Definizione. Una matrice si dice **convergente** se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$

Norme indotte dalla norma di vettore

Ogni **norma di vettore** può essere utilizzata per definire una **norma di matrice** che permette di "*misurare*" come la matrice agisce sui vettori:

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad X \in \mathbf{R}^n$$

$\|A\|$ = misura la massima lunghezza del vettore AX ,

Le norme indotte soddisfano tutte le **proprietà delle norme** e, inoltre, soddisfano la **relazione di compatibilità** :

$$\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

Infatti, se $X \neq 0$, si ha

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{\|X\| \neq 0} \left\| \frac{AX}{\|X\|} \right\| = \max_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \implies \|A\| \geq \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

Nota. Per tutte le norme indotte si ha $\|I\| = 1$ (I : matrice identità)

Norme indotte: esempi

- **Norma uno:**
$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{per colonne})$$

- **Norma infinito:**
$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{per righe})$$

- **Norma due o spettrale:**
$$\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^T A)}$$

dove $\rho(M) := \max_i |\lambda_i|$ (λ_i : autovalori di M) è il **raggio spettrale** della matrice $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Se A è **simmetrica** $\implies \rho(A^T A) = \rho^2(A) \implies \|A\|_2 = \rho(A)$

Autovalori

Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine n . Se esiste un numero (reale o complesso) λ e un vettore \mathbf{x} tali che

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

allora λ si dice *autovalore* di \mathbf{A} e \mathbf{x} è il corrispondente *autovettore*.

La relazione precedente può scriversi in forma equivalente come segue

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e, poichè $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, il determinante della matrice del sistema deve essere nullo, cioè

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

E' possibile dimostrare che l'identità precedente è equivalente a

$$\lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(\mathbf{A}) = 0.$$

Il polinomio al primo membro si dice *polinomio caratteristico* e le sue radici sono gli autovalori di A . Inoltre

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A).$$

Teorema. Per una norma verificante la **relazione di compatibilità** si ha $\rho(A) \leq \|A\|$.

Infatti da $\lambda X = AX \implies \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$.

Norme indotte: norma 1

• **Norma uno:** $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (per colonne)

dim: $\|A\|_1 = \max_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1$. Inoltre, $\|X\|_1 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 1$.

La i -esima componente del vettore AX è $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

Per dimostrare l'uguaglianza, indichiamo con h l'indice di colonna che realizza il massimo e con E_h il vettore della base canonica corrispondente, quindi $\|E_h\|_1 = 1$.

Considerando che il vettore $AE_h = (0, 0, \dots, 0, a_{ih}, 0, \dots, 0)^T$, si ha

$$\|AE_h\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ih}| = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Condizionamento di un sistema lineare

Il **condizionamento** del problema della soluzione di un sistema lineare è indipendente dal **metodo numerico** scelto per risolverlo.

Il **condizionamento** "*misura*" quanto una **perturbazione** sui dati di input (matrice dei coefficienti e termine noto) influenzi i risultati (la soluzione).

Un **sistema lineare** si dice **ben condizionato** se a **piccole** variazioni sui dati corrispondono **piccole** variazioni sui risultati.

Viceversa, se a **piccole** variazioni sui dati corrispondono **grandi** variazioni sui risultati, si dice che il sistema è **mal condizionato**.

Quando si approssima la soluzione di un sistema lineare **mal condizionato** bisogna **ridurre** il piú possibile gli **errori di arrotondamento**.

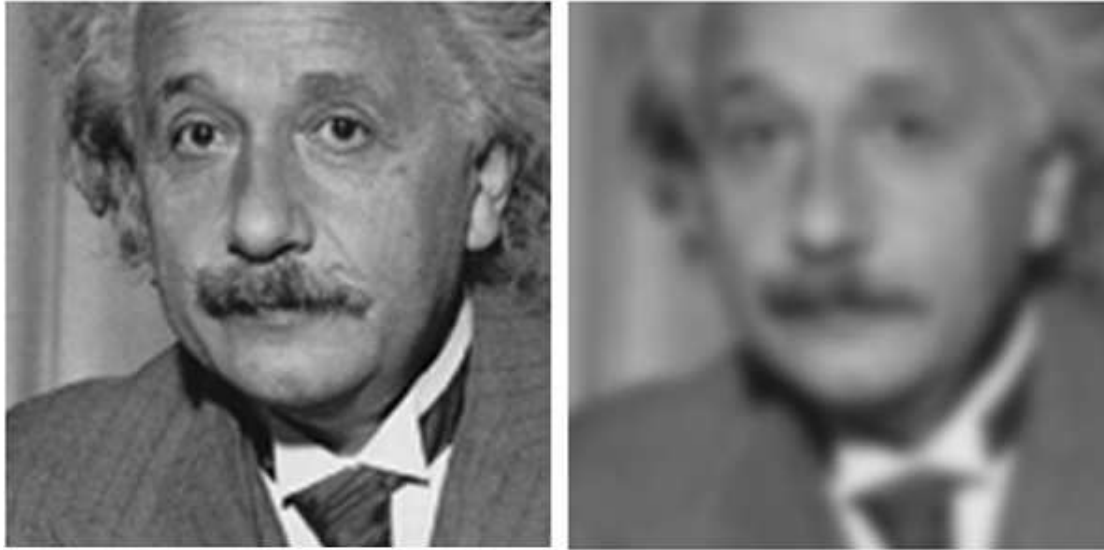
Condizionamento di un sistema lineare: Image deblurring

Un' **immagine digitale** è composta da elementi detti **pixels**. Ad ogni pixel è assegnato un valore di intensità che caratterizza il colore (livello di grigio) in una piccola porzione della scena rappresentata.

Un'immagine digitale a livelli di grigio (8 bits) è quindi una matrice i cui elementi sono numeri appartenenti all' intervallo **[0, 255]**

Piu' volte ci capita di scattare una foto e di non ottenere un' immagine nitida perchè la messa a fuoco non è stata corretta. Si ha così un' **immagine sfocata**. Una situazione molto simile si ha in diverse applicazioni come, per esempio, lo *imaging astronomico* in cui le immagini acquisite mediante telescopio possono essere disturbate dalla turbolenza dell' atmosfera.

L' **immagine sfocata** tipicamente si presenta mostrato di seguito



Ci chiediamo se si può ricostruire l' immagine originale a partire da quella sfocata (l' unico dato a disposizione)

Nel caso di **blurring lineare**, il problema consiste nel risolvere il sistema

$$AX = B$$

In cui A è l' operatore di blurring (dipendente dalla cosiddetta *point spread function*), X è l'immagine originale e B è l'immagine osservata (sfocata)

Tuttavia, se si risolve il sistema invertendo la matrice A , che si suppone nota, il risultato non è quello aspettato

Jonathan Swift
**Vision is the
art of seeing
what is
invisible to
others.** 

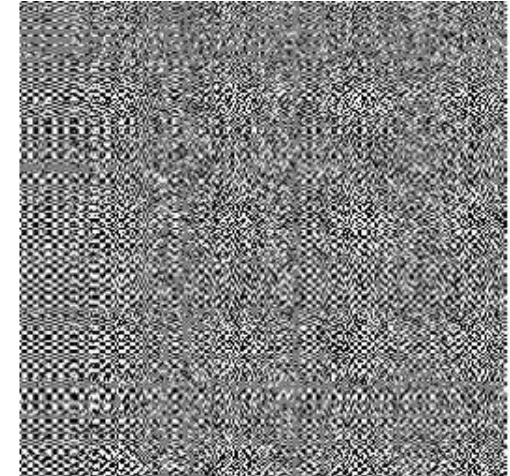


Immagine originale

Immagine sfocata

Immagine ricostruita

Cosa è accaduto???

L'inversione della matrice è molto sensibile agli errori sui dati, anche molto piccoli!

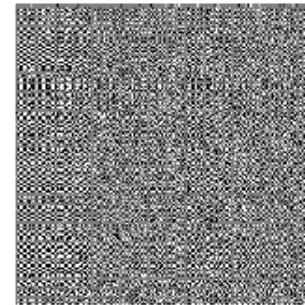
L'immagine B è sempre affetta da errori di arrotondamento che quindi possono propagarsi in maniera disastrosa sulla soluzione del sistema. In altre parole, invece di risolvere il sistema

$$AX = B$$

si risolve il sistema

$$AX = B + Err$$

e quindi nella soluzione $X = A^{-1}(B + Err) =$



il **rumore/errore** Err è molto amplificato!

Il problema si dice **mal condizionato**.

Errore sul termine noto

Supponiamo che il termine noto B sia affetto da un **errore** δB .

$$A X = B \xrightarrow{\delta B} A(X + \delta X) = B + \delta B$$

Per sottrazione si ricava

$$A \delta X = \delta B \rightarrow \boxed{\delta X = A^{-1} \delta B}$$

Per "*misurare*" la perturbazione δX indotta su X si ricorre alla norma.

$$\|\delta X\| = \|A^{-1} \delta B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta B\|$$

$$\|B\| = \|A X\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

Dividendo termine a termine si trova una maggiorazione per l'**errore relativo** $\|\delta X\|/\|X\|$.

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K(A)} \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} = K(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

Numero di condizionamento

$K(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$: **numero di condizionamento** della matrice A

$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq K(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$ Rappresenta il **coefficiente di amplificazione** dell'errore relativo sui dati

Si può dimostrare che

$$1 \leq K(A) \leq +\infty$$

Condizionamento **ottimo**
(matrici ortogonali)

Condizionamento **peggiore**
(matrici singolari)

Esempi di matrici malcondizionate: matrici di Hilbert

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

Errore sulla matrice dei coefficienti

Se anche la matrice A è affetta da un **errore** δA si ha

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \underbrace{\frac{K(A)}{1 - K(A)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}_{\downarrow} \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Coefficiente di amplificazione

dim: In questo caso si risolve il sistema lineare

$$(A + \delta A)(X + \delta X) = B + \delta B \quad \text{invece di} \quad AX = B$$

aggiungendo ad ambo i membri dell'ultima identità la quantità δA e sottraendo alla prima si ha

$$(A + \delta A)(\delta X) = \delta B - \delta AX$$

da cui

$$\|\delta X\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \|\delta B - \delta AX\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| (\|\delta B\| + \|\delta A\| \|X\|),$$

Dividendo per $\|X\|$ ambo i membri

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \left(\frac{\|\delta B\| \|B\|}{\|X\| \|B\|} + \|\delta A\| \right),$$

Osservando che $\frac{\|B\|}{\|X\|} = \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \|A\|$, la disequazione precedente si riscrive come segue

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \|A\| \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right), \quad (*)$$

D'altra parte $(A + \delta A)^{-1} = (A(I + A^{-1}\delta A))^{-1} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$.

Inoltre, se $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, risulta

$$(A + \delta A)^{-1} = \left(I + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}\delta A)^k \right) A^{-1}$$

da cui

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|A^{-1}\delta A\|^k \right)$$

e considerando la somma della serie geometrica

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \left(1 + \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \right) \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\| \left(1 + \frac{\|A^{-1}\| \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \right) = \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} = \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

Sostituendo l'ultima disuguaglianza in (*) si ha

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \|A\| \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right) = \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Oss: Se $\|\delta A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, allora $\frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \leq 2K(A)$

Condizionamento in norma 2

Se A è (simmetrica) **definita positiva** si ha $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

$$\text{Infatti } \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A) = \lambda_{max}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_i \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_{min}}$$

Esercizio 1

Determinare il numero di condizionamento, rispetto alla norma infinito, della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \delta \\ 1 - \delta & 1 \end{pmatrix}$$

con $\delta > 0$.

Posto $\delta = 0.01$, sia A la matrice dei coefficienti del sistema $AX = B$, con $B = (2.01, 1.99)^T$ e si consideri il sistema perturbato $A\bar{X} = \bar{B}$, con $\bar{B} = (2, 2)^T$. Dare una stima dell'errore relativo commesso sulla soluzione X .

Soluzione Si verifica facilmente che $A^{-1} = \frac{1}{\delta^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 - \delta \\ -1 + \delta & 1 \end{pmatrix}$

e quindi $K_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = (2 + \delta) \frac{2 + \delta}{\delta^2} = \frac{(2 + \delta)^2}{\delta^2}$

Si osserva che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} K_{\infty}(A) = 1$$

mentre

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} K_{\infty}(A) = +\infty;$$

cioè per valori di δ molto piccoli, la matrice risulta malcondizionata.

Per esempio, se $\delta = 0.01$, $K_{\infty}(A) = (201^2) = 40401$, mentre se $\delta = 100$, $K_{\infty}(A) = \frac{10404}{10000} = 1.0404$.

$$\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq K_\infty(A) \frac{\|\delta B\|_\infty}{\|B\|_\infty}$$

e, quindi, posto $\delta = 0.01$ si ha

$$\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq 40401 \frac{\|B - \bar{B}\|_\infty}{2.01} = 40401 \frac{0.01}{2.01} = 201$$

Si verifica facilmente che la soluzione del sistema $AX = B$ è $X = (1, 1)^T$, da cui $\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq 201$

mentre $\bar{X} = (-200, 200)^T$, da cui $\|\delta X\|_\infty = 200$.

Esercizio 2

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) studiare come varia il numero di condizionamento $K(A(\lambda))$ in norma 1 per $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$ e trovarne il massimo.

b) Dato il sistema $A \left(\frac{1}{2}\right) X = B$, fornire una stima dell'errore relativo

$\frac{\|\delta X\|_1}{\|X\|_1}$ corrispondente a un errore relativo $\frac{\|\delta B\|_1}{\|B\|_1} = 10^{-2}$.

Traccia della soluzione

$$\mathbf{a)} \quad \|A(\lambda)\|_1 = \max(2, 2, 2|\lambda|+1) = \begin{cases} 2 & \text{per } 2|\lambda| + 1 \leq 2 \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{1}{2} \\ 2|\lambda| + 1 & \text{per } 2|\lambda| + 1 > 2 \Rightarrow |\lambda| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A(\lambda)\|_1 \leq 3 \text{ per } |\lambda| \leq 1$$

$$K(A(\lambda)) = \|A(\lambda)\|_1 \|A^{-1}(\lambda)\|_1$$

$$A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2\lambda \\ -1 & 1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \|A^{-1}(\lambda)\|_1 = \begin{cases} 3/2 & \text{per } |\lambda| \leq \frac{1}{4} \\ 2|\lambda| + 1 & \text{per } |\lambda| > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$K(A(\lambda)) = \begin{cases} 3 & \text{per } |\lambda| \leq \frac{1}{4} \\ 2(2|\lambda| + 1) & \text{per } \frac{1}{4} < |\lambda| \leq \frac{1}{2} \\ (2|\lambda| + 1)^2 & \text{per } \frac{1}{2} < |\lambda| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{|\lambda| \leq 1/2} K(A(\lambda)) = K(A(1/2)) = 4$$

$$\mathbf{b)} \quad \frac{\|\delta X\|_1}{\|X\|_1} \leq K(A(1/2)) \frac{\|\delta B\|_1}{\|B\|_1} = 4 \cdot 10^{-2}$$

Esercizio 3

Studiare il condizionamento del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + 1.001y = 0 \end{cases}$$

Soluzione La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1.001 \end{pmatrix}$$

Il numero di condizionamento di A è : $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

$K(A)$ dipende dalla norma di matrici scelta.

Valutiamo allora $K_1(A)$, $K_\infty(A)$ e $K_2(A)$, rispettivamente il numero di condizionamento di A rispetto alle norme 1 , ∞ e *spettrale*.

Si verifica facilmente che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1.001 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

con $\det(A) = 0.002$.

Quindi

$$\|A\|_{\infty} = 3.001 \quad \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{4}{0.002} \quad \Rightarrow \quad K_{\infty}(A) = 3.001 \cdot 2 \cdot 1000 = 6002$$

$$\|A\|_1 = 4 \quad \|A^{-1}\|_1 = \frac{3.001}{0.002} \quad \Rightarrow \quad K_1(A) = 4 \cdot \frac{3.001}{0.002} = 6002$$

Per valutare la **norma spettrale** di A è necessario calcolare il **raggio spettrale** della matrice $A^T A$, infatti

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}:$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4.002 \\ 4.002 & 2.002001 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori λ_1 e λ_2 sono soluzione della seguente equazione di secondo grado

$$\lambda^2 - 10.002001\lambda + 0.000004$$

Poichè $\rho(A^T A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = 10.00200060008001$, risulta

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \approx 3.1626.$$

Analogamente

$$A^{-1T}A^{-1} = \frac{1}{(\det(A))^2} \begin{pmatrix} 1.001 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.001 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.002001 & -5.001 \\ -5.001 & 5 \end{pmatrix}$$

da cui risulta

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^{-1T}A^{-1})} \approx 1.5813 \cdot 10^3$$

e quindi

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = 3.1626 \cdot 1.5813 \cdot 10^3 = 5.0010 \cdot 10^3.$$

In tutti e tre i casi il **numero di condizionamento è molto alto**, ne segue che una piccola perturbazione sui dati, produce un errore non trascurabile sulla soluzione.

Per esempio, la soluzione del sistema precedente è $\mathbf{x} = (x, y)$, con $x = 1501.5$ e $y = -3000$.

Supponiamo ora di aver un errore pari a 0.001 sul coefficiente a_{22} della matrice A , cioè di dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + 1.002y = 0 \end{cases}$$

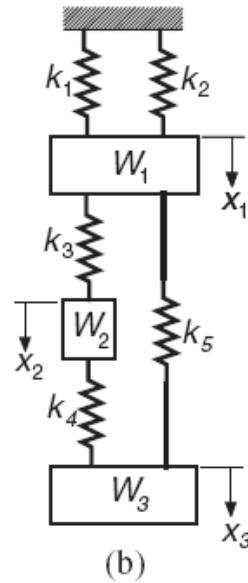
In questo caso la soluzione diventa $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, con $\tilde{x} = 751.5$ e $\tilde{y} = -1500$, cioè, scegliendo la norma infinito,

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{1500}{3000} = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} = \frac{0.001}{3.001} = 3.33 \cdot 10^{-4}.$$

Esercizio 4



Il sistema in figura, , costituito da 4 molle che sostengono 3 pesi W_i , $i = 1, \dots, 3$, all'equilibrio soddisfa

$$\begin{cases} (k_1 + k_2 + k_3 + k_5)x_1 & -k_3 x_2 & -k_5 x_3 & = W_1 \\ -k_3 x_1 & +(k_3 + k_4) x_2 & -k_4 x_3 & = W_2 \\ -k_5 x_1 & -k_4 x_2 + & (k_4 + k_5) x_3 & = W_3 \end{cases}$$

con k_i costante elastica della molla i -esima e x_j spostamento della massa j -esima rispetto alla posizione nel sistema non deformato.

Ponendo $k_1 = k_3 = k_4 = k$, $k_2 = k_5 = 2k$, $W_1 = W_3 = 2W$ e $W_2 = W$, stabilire se il numero di condizionamento del sistema, calcolato rispetto alle norme $1, 2$ e *infinito*, dipende dal valore del parametro k . Produrre una maggiorazione dell'errore relativo sulla soluzione nel caso in cui il valore del parametro W sia dato con errore pari a 0.03 .

Soluzione:

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 6k & -k & -2k \\ -k & 2k & -k \\ -2k & -k & 3k \end{pmatrix}$ da cui

$$A^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

Poichè A , e quindi A^{-1} , è simmetrica, il numero di condizionamento di A rispetto alla norma 1 coincide con quello valutato rispetto alla norma infinito, cioè

$$K_1(A) = K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty.$$

Poichè

$$\|A\|_{\infty} = \max\{9k, 4k, 6k\} = 9k$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max\left\{\frac{1}{k}, \frac{27}{15k}, \frac{24}{15k}\right\} = \frac{27}{15k}$$

risulta

$$K_1(A) = K_{\infty}(A) = 9k \frac{27}{15k} = \frac{81}{5}$$

Quindi, il condizionamento del sistema rispetto alle norme 1 e infinito non dipende dal valore del parametro k .

Gli autovalori di A e A^{-1} non dipendono dal parametro k in quanto esso moltiplica tutti gli elementi delle due matrici, quindi anche $K_2(A)$ non dipende dal valore del parametro k e per calcolarlo basta valutare il numero di condizionamento delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

L'errore relativo della soluzione del sistema valutato rispetto alla norma infinito soddisfa

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} < K_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

in quanto la matrice A si suppone non affetta da errori. Poichè W ha errore 0.03, $\|\delta b\|_\infty = \max\{2 \cdot 0.03, 0.03, 2 \cdot 0.03\} = 0.06$, e quindi

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} < \frac{81}{5} \frac{6}{100} \frac{1}{2W} = \frac{243}{500 W}$$

Esercizio 5

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

e il termine noto $b = \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 18 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

1. Risolvere il sistema $AX = b$ con un opportuno metodo diretto
2. Sia $\delta b = rand(5, 1) * 10^{-3}$ una perturbazione di b ; dare una stima dell'errore relativo commesso risolvendo il sistema $AX = b + \delta b$ (usare le norme 1, 2 e ∞)

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*:

Cap. 2 §§ 2.1-2.5, 2.8-2.11

Cap. 4 §§ 4.1-4.3, 4.8, 4.9 (escluso il pivoting totale) 4.10 (solo enunciati dei teoremi), 4.12

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*:

2.1-2.5, 2.10-2.13, 2.17, 7.15, 7.52