

Metodi Numerici con elementi di Programmazione

(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Sistemi lineari

Metodi iterativi

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

<http://ingaero.uniroma1.it/>

nella pagina dedicata al corso [Metodi Numerici con elementi di Programmazione](#)

Sistemi lineari: Metodi iterativi

- la soluzione si ottiene tramite approssimazioni successive (**metodi del punto unito**)
- soluzione esatta si ottiene in un numero infinito di passi (**errore di troncamento**)
- bassa occupazione di memoria
- problemi sparsi e/o di elevate dimensioni

Sistemi non lineari

$$F(X) = 0$$

$$X, F \in \mathbf{R}^n$$

$$\rightarrow F(X) = AX - B$$

Sistemi lineari

$$AX = B$$

$$X, B \in \mathbf{R}^n \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$



$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$F = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$$

$$0 = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$



$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=0}^n$$

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo del punto unito

Sistemi non lineari

$$F(X) = 0 \Leftrightarrow X = \Phi(X) \text{ con } \Phi = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X)]^T$$

Se $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ è **radice** di F allora è **punto unito** di Φ :

$$F(\bar{X}) = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = \Phi(\bar{X})$$

Sistemi lineari

$$AX = B \Leftrightarrow X = CX + Q \text{ con } Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

$$C = [c_{ij}]_{i,j=0}^n$$

Se $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ è **soluzione** di $AX = B$ allora è **punto unito** di $\Phi = CX + Q$:

$$A\bar{X} = B \Leftrightarrow \bar{X} = C\bar{X} + Q$$

Metodi iterativi a un punto

Il **punto unito** $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$, $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \text{ dato} \\ X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)}) \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T \text{ dato} \\ x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Le funzione φ_i sono chiamate **funzioni di iterazione**.

Metodi iterativi per sistemi lineari

Nel caso **lineare** il **punto unito** $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\begin{cases} X^{(k)} = \mathbf{C}X^{(k-1)} + Q & k = 1, 2, \dots \\ X^{(0)} \in \mathbf{R}^n & \text{dato} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{(k-1)} + q_i \quad i = 1, \dots, n$$

La matrice $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è chiamata **matrice di iterazione**.

Convergenza

Per poter definire la **convergenza** di un metodo iterativo dobbiamo prima di tutto definire l'**errore di troncamento**

Errore di troncamento: $E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

\swarrow \searrow

soluzione esatta **soluzione approssimata**

Per "*misurare*" la lunghezza di un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ si ricorre alla **norma di vettore**:

$$\|V\| = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Se il metodo iterativo è **convergente**, in assenza di errori di arrotondamento si ottiene la **soluzione esatta** dopo un **numero infinito** di passi.

Nota. In pratica ci si arresta quando $\|E^{(k)}\| \leq \epsilon$ (**criterio di arresto**)

Convergenza: condizione necessaria

Tramite la **norma di vettore** si può "misurare" la **lunghezza** del vettore errore di truncamento, cioè la **distanza** tra la soluzione esatta e quella approssimata.

$$\text{Convergenza: } \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$$

Teorema. Sia S uno **spazio vettoriale normato** e sia $\Phi : S \rightarrow S$. Se la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a un valore $\bar{X} \in S$ e l'applicazione Φ è **continua** in $\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ è **punto unito** di Φ , cioè $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$.

Dim.

$$\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X^{(k-1)}) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k-1)}\right) = \Phi(\bar{X})$$

Convergenza: condizione sufficiente

Definizione. Un'applicazione $\Phi : S \rightarrow S$, dove S è uno **spazio normato** è detta **contrazione**, se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\| < \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in S$$

Teorema. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\Phi : D \rightarrow D$ è una **contrazione**

\Rightarrow • esiste un **unico punto unito** $\bar{X} \in D$ di Φ

- la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a \bar{X} per ogni **approssimazione iniziale** $X^{(0)} \in D$

Contrazione: condizione sufficiente

Matrice Jacobiana di Φ

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema. Se *i)* le **funzioni di iterazione** $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono **continue** e **parzialmente derivabili** in D ;
ii) esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|J(X)\| \leq \lambda$ per $X \in D$
 $\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** in D

dim: $\forall X, Y \in D$, si può valutare $\|\Phi(Y) - \Phi(X)\|$ considerando lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine della funzione Φ attorno a X , da cui risulta

$$\|\Phi(Y) - \Phi(X)\| \leq \|J(X)\| \|Y - X\| \leq \lambda \|Y - X\|.$$

Metodi iterativi per sistemi lineari: condizione sufficiente di convergenza

Matrice Jacobiana di $\Phi = \mathbf{C}X + Q$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Corollario. Se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|\mathbf{C}\| \leq \lambda$
 $\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** per ogni X
 \Rightarrow il metodo iterativo è **convergente**

Dim:

$$\forall X \neq Y, \quad \|\Phi(X) - \Phi(Y)\| = \|\mathbf{C}(X - Y)\| \leq \|\mathbf{C}\| \|X - Y\| \leq \lambda \|X - Y\|$$

Condizione sufficiente di convergenza

Teorema. Condizione sufficiente affinché un metodo iterativo sia **convergente** a \bar{X} per **qualunque scelta** del vettore iniziale $X^{(0)}$, è che

$$\|C\| < 1$$

$$E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} = (C\bar{X} + Q) - (CX^{(k-1)} + Q) =$$

$$= C(\bar{X} - X^{(k-1)}) = CE^{(k-1)} \Rightarrow \boxed{E^{(k)} = CE^{(k-1)}}$$

$$\|E^{(k)}\| = \|CE^{(k-1)}\| = \|C^2E^{(k-2)}\| = \dots = \|C^k E^{(0)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\|$$

↓
Relazione di compatibilità

$$\|E^{(k)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\| = \underbrace{\|C \cdot C \dots C\|}_{k \text{ volte}} \cdot \|E^{(0)}\| \leq \|C\|^k \cdot \|E^{(0)}\|$$

$$\boxed{\text{se } \|C\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0}$$

Condizione necessaria e sufficiente di convergenza

Definizione. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice **convergente** se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$
(o, in modo equivalente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$)

Teorema. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è **convergente** se e solo se $\rho(A) < 1$

dim: \Rightarrow Se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, allora definitivamente $\|A^k\| < 1$. Poichè, dalla relazione di compatibilità risulta $\rho(A^k) < \|A^k\|$, segue che $\rho(A^k) < 1$; ma $\rho^k(A) = \rho(A^k)$, quindi $\rho^k(A) < 1$, ovvero $\rho(A) < 1$.

\Leftarrow Se $\rho(A) < 1$ allora $\exists \epsilon : \rho(A) < 1 - \epsilon$. Inoltre, poichè $\rho(A) \leq \|A\|$, esiste una norma compatibile per cui $\|A\| < \rho(A) + \epsilon$; quindi $\|A\| < 1 - \epsilon + \epsilon = 1$. Ne segue che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k = 0$. Il teorema risulta dimostrato osservando che $0 \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Teorema. Un metodo iterativo **converge** per **qualunque scelta** del vettore iniziale $X^{(0)}$, **se e solo se**

$$\rho(C) < 1$$

dove $\rho(C) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ è il **raggio spettrale** della matrice di iterazione C

$$E^{(k)} = C E^{(k-1)} = \dots = C^k E^{(0)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} C^k E^{(0)} = 0 \iff \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0}_{\text{matrice convergente}} \iff \rho(C) < 1$$

Criterio d'arresto

Se il metodo iterativo è **convergente**, si arresta il procedimento quando

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon \quad \varepsilon: \text{tolleranza prefissata}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|E^{(k)}\| &= \|X^{(k)} - \bar{X}\| = \|X^{(k)} - X^{(k+1)} + X^{(k+1)} - \bar{X}\| = \\ &= \|X^{(k)} - X^{(k+1)} + E^{(k+1)}\| \leq \underbrace{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|E^{(k+1)}\|}_{\downarrow} \\ \bullet \quad \|E^{(k+1)}\| &\leq \|C\| \cdot \|E^{(k)}\| \leq \|C\| (\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|E^{(k+1)}\|) \end{aligned}$$

$$\|E^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \cdot \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

d'altra parte

$$\|E^{(k+1)}\| \leq \|C\|^k E^{(1)} \leq \frac{\|C\|^{k+1}}{1 - \|C\|} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \leq \varepsilon$$

Stima a priori: il numero di iterazioni K necessario affinché

$\|E^{(K)}\| < \varepsilon$, è dato da

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C\|) \varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|} \right) \frac{1}{\log \|C\|}$$

Velocità asintotica di convergenza

Se $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una **matrice convergente**, vale la proprietà

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \rho(A)$$

Dalla relazione

$$\|E^{(k)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\|$$

per k "grande" si ottiene

$$\frac{\|E^{(k)}\|}{\|E^{(0)}\|} \leq \|C^k\| \approx \rho^k(C)$$

⇒ L'errore si riduce di un fattore 10^{-m} all'iterazione

$$K \simeq -\frac{m}{\text{Log } \rho(C)}$$

Velocità asintotica di convergenza: $V = -\text{Log } \rho(C)$

Esercizio 1

Data la matrice di iterazione $C(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbf{R}$, e il

vettore $Q = (7/8, 7/8, -1/2)^T$,

1.1) determinare per quali valori di β il procedimento iterativo

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = C(\beta)X^{(k)} + Q, & k = 0, 1, \dots \quad X^{(k)} \in \mathbf{R}^3 \\ X^{(0)} \quad \text{dato} \end{cases}$$

risulta **sicuramente convergente**;

1.2) posto $\beta = 1/2$, $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, dare una stima del numero di iterazioni necessarie affinché l'approssimazione abbia 5 decimali esatti.

Traccia della soluzione

1.1) Condizione sufficiente di convergenza: $\|C\|_1 < 1$ oppure $\|C\|_\infty < 1$

$$\|C\|_1 = \max\left(2|\beta| + \frac{1}{2}, |\beta| + \frac{1}{4}\right) = 2|\beta| + \frac{1}{2} \quad \|C\|_1 < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{1}{4}$$

$$\|C\|_\infty = \max\left(\frac{3}{2}|\beta|, \frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} & |\beta| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}|\beta| & |\beta| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \|C\|_\infty < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{2}{3}$$

Attenzione: le condizioni su β sono diverse a seconda della norma che si sceglie.

$$1.2) \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \|C(\frac{1}{2})\|_1 = \frac{3}{2} > 1 \quad \|C(\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

Attenzione: in **norma uno** non si può stabilire se il metodo converge, si ha invece convergenza in **norma infinito**, infatti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\|_\infty = 0$$

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C(\frac{1}{2})\|_\infty)\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty} \right) \frac{1}{\log \|C(\frac{1}{2})\|_\infty}$$

$$\|C(\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4}, \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = \|Q\|_\infty = \max |q_i| = \frac{7}{8}, \quad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow K \geq 47$$

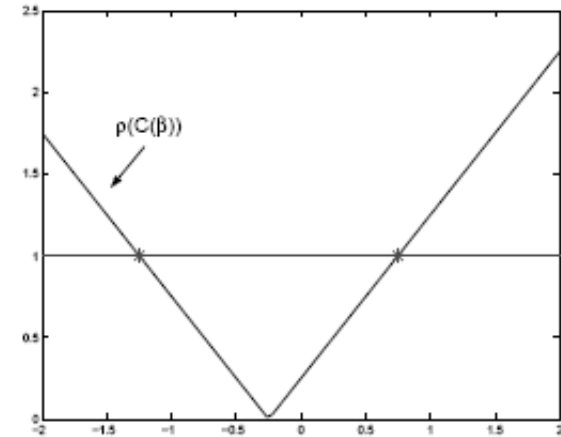
Condizione necessaria e sufficiente di convergenza:

$$\rho(C(\beta)) < 1$$

Autovalori di $C(\beta)$: 0 con molteplicità 2 , $\frac{1}{4} + \beta$

Raggio spettrale di $C(\beta)$: $\rho(C(\beta)) = \left| \frac{1}{4} + \beta \right|$

$$\rho(C(\beta)) < 1 \Rightarrow \boxed{-\frac{5}{4} < \beta < \frac{3}{4}}$$



Velocità di convergenza: $V(\beta) = -\text{Log}(\rho(C(\beta))) = -\text{Log} \left| \frac{1}{4} + \beta \right|$

Nota: questo intervallo di β **contiene** entrambi gli intervalli trovati con la condizione sufficiente.

Esercizio 2

Supponendo di applicare il metodo iterativo

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \beta(AX^{(k)} - B)$$

al sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

determinare un intervallo di valori di β per il quale il metodo sia convergente e calcolare in funzione di β la costante di contrazione in una norma a scelta.

Soluzione

Il metodo iterativo si può riscrivere come

$$X^{(k+1)} = (I + \beta A)X^{(k)} - \beta B$$

con matrice di iterazione è $C = I + \beta A$, cioè

$$C = \begin{pmatrix} 1 + 2\beta & \beta \\ \beta & 1 + 2\beta \end{pmatrix}$$

Poichè C è simmetrica, $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_1$.

Condizione sufficiente per la convergenza

$$\|C\|_\infty = |1 + 2\beta| + |\beta| < 1 \Leftrightarrow \beta \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza $\rho(C) < 1$, cioè

$$\det \begin{pmatrix} 1 + 2\beta - \lambda & \beta \\ \beta & 1 + 2\beta - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\beta - \lambda)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda(1 + 2\beta) + (1 + 2\beta)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = (1 + 2\beta) \pm \sqrt{(1 + 2\beta)^2 - (1 + 2\beta)^2 + \beta^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 + 2\beta \pm \beta.$$

I due autovalori di C sono $\lambda_1 = 1 + \beta$ e $\lambda_2 = 1 + 3\beta$ da cui

$$\rho(C) = \max\{|1 + \beta|, |1 + 3\beta|\} < 1 \Leftrightarrow \beta \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

Costruzione di metodi iterativi

$$AX = B \quad \longrightarrow \quad X = CX + Q$$

Splitting di A : $A = M + N$ dove M è una matrice **invertibile**.

$$AX = B \rightarrow (M + N)X = B \rightarrow MX = -NX + B \rightarrow$$

$$\rightarrow X = -M^{-1}NX + M^{-1}B \Rightarrow \boxed{C = -M^{-1}N \quad Q = M^{-1}B}$$

Una possibile **decomposizione** di A è

$$\boxed{A = L + D + U}$$

dove $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ (elementi **diagonali** di A)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

(elementi di A al di **sotto**
della diagonale principale)

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(elementi di A al di **sopra**
della diagonale principale)

Metodo di Jacobi

$$M = D, N = L + U$$

$$\begin{cases} C_J = -D^{-1}(L + U) \\ Q_J = D^{-1}B \end{cases}$$

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad Q_J = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Algoritmo J

$$X^{(k)} = C_J X^{(k-1)} + Q_J \Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k \geq 0$$

Infatti, D^{-1} è una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono $-\frac{1}{a_{ii}}$, $i = 1, \dots, n$, mentre la matrice $(L + U)$ ha gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a 0.

Moltiplicare a sinistra la matrice $(L + U)$ per D^{-1} , corrisponde a dividere ogni elemento della i -esima riga di $(L + U)$ per $-\frac{1}{a_{ii}}$

Metodo di Gauss-Seidel

$$M = D + L, N = U \Rightarrow \begin{cases} C_{GS} = -(D + L)^{-1}U \\ Q_{GS} = (D + L)^{-1}B \end{cases}$$

$$X^{(k)} = C_{GS}X^{(k-1)} + Q_{GS}$$



Algoritmo GS

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k \geq 0$$

Infatti, riscrivendo $X^{(k+1)} = C_{GS}X^{(k)} + Q_{GS}$ come $(L + D)X^{(k+1)} = -UX^{(k)} + B$ e considerando che $D + L$ è una matrice triangolare inferiore mentre U è triangolare superiore con elementi nulli sulla diagonale principale, si ha

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i.$$

L' **algorithm GS** si ottiene, quindi, isolando la componente $x_i^{(k+1)}$ al primo membro.

Convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

- Per **verificare** la convergenza si possono applicare alle matrici di iterazione C_J e C_{GS} le condizioni già viste:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{C.S.:} \quad \|C_J\|_1, \|C_J\|_\infty < 1 \quad \text{e} \quad \|C_{GS}\|_1, \|C_{GS}\|_\infty < 1 \\ \text{C.N.S.:} \quad \rho(C_J) < 1 \quad \text{e} \quad \rho(C_{GS}) < 1 \end{array} \right.$$

Attenzione: Le **condizioni di convergenza** per le matrici di iterazione C_J e C_{GS} vanno **verificate** di volta in volta.

- Per alcune matrici A potrebbe convergere **solo uno** dei due metodi.
- Se convergono entrambi i metodi, quello di **Gauss-Seidel** converge **più velocemente**.

Esercizio

Dato il sistema lineare $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1, 0, 0)^T,$$

1.1) verificare quale tra i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel risulta convergente;

1.2) approssimare la soluzione del sistema lineare con 6 decimali esatti.

Traccia della soluzione

$$\mathbf{1.1)} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno norma **maggiore di 1**, quindi la **condizione sufficiente** di convergenza **non è soddisfatta**. Per verificare se è soddisfatta la **condizione necessaria e sufficiente** bisogna calcolare il **raggio spettrale** delle matrici di iterazione.

Autovalori di C_J : 0 con molteplicità 3

$\Rightarrow \rho(C_J) = 0 \Rightarrow$ il metodo di Jacobi **converge**

Autovalori di C_{GS} : 0 con molteplicità 1, 2 con molteplicità 2

$\Rightarrow \rho(C_{GS}) = 2 \Rightarrow$ il metodo di Gauss-Seidel **non converge**

1.2) Per approssimare la soluzione del sistema lineare con **6 decimali esatti**, si può utilizzare il **metodo di Jacobi** arrestando le iterazioni quando

$$\|E^{(k+1)}\| \simeq \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ (criterio di arresto)}$$

Iterazioni

$$X^{(0)} = Q_J = D^{-1}B = (1, 0, 0)^T$$

$$X^{(1)} = C_J X^{(0)} + Q_J = (1, -2, -2)^T \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = 2$$

$$X^{(2)} = C_J X^{(1)} + Q_J = (1, 2, 0)^T \quad \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty} = 4$$

$$X^{(3)} = C_J X^{(2)} + Q_J = (1, 2, 0)^T \quad \|X^{(3)} - X^{(2)}\|_{\infty} = 0$$

Nota 1. In questo caso la soluzione è **esatta**.

Nota 2. La **velocità di convergenza** è $V_J = -\text{Log}(\rho(C_J)) = \infty$.

Convergenza per matrici A con struttura speciale

Matrici diagonalmente dominanti:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(diagonale dominante per **righe**)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(diagonale dominante per **colonne**)

Condizione sufficiente di convergenza:

Teorema. Se A è **diagonalmente dominante** per righe o per colonne, i **metodi di Jacobi** e **Gauss-Seidel** sono entrambi **convergenti** per qualunque scelta dell'approssimazione iniziale $X^{(0)}$.

Per esempio, se A è **diagonalmente dominante per righe** si ha

$$\|C_J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \frac{1}{|a_{ii}|} < 1$$

Matrici (simmetriche) definite positive:

Una matrice quadrata $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ **simmetrica** è **definita positiva** se

$$X^T A X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall X \in \mathbf{R}^n$$

Per riconoscere se una matrice è definita positiva si può usare il **criterio di Sylvester**:

Affinché una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ **simmetrica** sia **definita positiva**, è **necessario e sufficiente** che

$$\det A_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dove A_k sono le **sottomatrici principali di testa** di A .

Condizione sufficiente di convergenza:

Teorema. Se A è (simmetrica) **definita positiva**, il **metodo di Gauss-Seidel** è **convergente** per qualunque scelta dell'approssimazione iniziale $X^{(0)}$.

Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + \beta x_3 = 3 \end{cases}$$

dipendente dai parametri α e β . Stabilire per quali valori dei parametri α e β i metodi iterativi di **Jacobi** e **Gauss-Seidel** convergono sicuramente per ogni scelta del vettore iniziale $\mathbf{X}^{(0)}$.

Condizione sufficiente perchè un metodo iterativo converga rispetto ad una norma di matrici $\|\cdot\|$ è che la norma della matrice di iterazione C sia strettamente minore di 1, cioè $\|C\| < 1$.

Sia $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti del sistema,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora la matrice di iterazione del metodo di Jacobi C_J è data da

$$C_J = -D^{-1}(L + U),$$

cioè

$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{2}{\beta} & -\frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Considerando la $\|\cdot\|_\infty$ risulta

$$\|C_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{10}, \frac{2}{|\alpha|}, \frac{3}{|\beta|}\right\} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{|\alpha|} < 1 \quad \wedge \quad \frac{3}{|\beta|} < 1,$$

cioè

$$|\alpha| > 2 \quad \wedge \quad |\beta| > 3.$$

Si osserva che alla stessa conclusione si giunge imponendo che la matrice A del sistema sia a **diagonale dominante per righe**.

Considerando, invece, la $\|\cdot\|_1$ risulta

$$\|C_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|}\right\} < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|} < 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|} < 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|} < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|\beta|+2|\alpha|}{|\alpha||\beta|} < 1 \\ |\beta| > \frac{10}{9} \\ |\alpha| > \frac{10}{9} \end{cases}$$

da cui $\frac{10}{3} < |\beta| + 2|\alpha| < |\alpha||\beta|$.

E' opportuno notare che in questo caso non si arriva alla stessa conclusione imponendo la dominanza diagonale per colonne.

Inoltre, scegliendo $\alpha = \frac{9}{4}$ e $\beta = \frac{13}{4}$ risulta $\|C_J\|_\infty < 1$ mentre $\|C_J\|_1 > 1$. Infatti,

$$\frac{13}{4} + 2\frac{9}{4} = \frac{31}{4} = 7.75 > \frac{9}{4} \frac{13}{4} = \frac{117}{16} \approx 7.3125.$$

In questo caso, per esempio, sono necessarie almeno

$$K = 184$$

iterazioni per ottenere un errore $\|E^{(K)}\|_\infty$ tra due approssimazioni successive inferiore a $0.5 \cdot 10^{-5}$ avendo scelto $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$ come approssimazione iniziale.

Infatti risulta

$$\|E^{(K)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

quando

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C\|_{\infty}) \varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty}} \right) \frac{1}{\log \|C\|_{\infty}}$$

dove $\|C\|_{\infty} = \frac{12}{13}$, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$,

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = \|X^{(1)}\|_{\infty} = \|Q_J\|_{\infty} = \frac{12}{13}$$

e $Q = D^{-1}B = \left[\frac{b_1}{a_{11}} \quad \frac{b_2}{a_{22}} \quad \frac{b_3}{a_{33}} \right]^T = \left[\frac{2}{10} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{12}{13} \right]^T$,

con $B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T = [2 \quad 1 \quad 3]^T$ vettore dei termini noti del sistema.

Viceversa, se si pone $\alpha = 4$ e $\beta = 3$, il metodo di Jacobi non soddisfa la condizione sufficiente rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ mentre converge sicuramente rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Inoltre

$$\|E^{(K)}\|_1 < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

se

$$K > 166.03$$

avendo scelto $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

ed essendo $\|X^{(1)}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \right\|_1 = \frac{2}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$

e $\|C\|_1 = \frac{11}{12}$

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è data da

$$C_{GS} = -(L + D)^{-1}U,$$

con

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\alpha} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{10\beta} \left(\frac{1}{\alpha} - 2\right) & -\frac{1}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10\alpha} & -\frac{9}{10\alpha} \\ 0 & -\frac{1}{10\alpha\beta} + \frac{1}{5\beta} & \frac{9}{10\alpha\beta} + \frac{1}{5\beta} \end{pmatrix}.$$

$$\|C_{GS}\|_{\infty} = \max\left\{\frac{2}{10}, \frac{1}{|\alpha|}, \frac{|2\alpha - 1| + |9 + 2\alpha|}{10|\alpha||\beta|}\right\} < 1$$

se

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |2\alpha - 1| + |9 + 2\alpha| < 10|\alpha||\beta| \end{cases}$$

Si osserva che $\alpha = \frac{9}{4}$ e $\beta = \frac{13}{4}$ soddisfano la condizione precedente.

Quindi il metodo di Gauss-Seidel sicuramente converge per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

Scegliendo $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$, sono necessarie

$$K = 16$$

affinchè $\|E^{(K)}\|_{\infty} < \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Infatti, $\|C_{GS}\|_{\infty} = \frac{4}{9}$

mentre

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|_{\infty} &= \|\mathbf{X}^{(1)}\|_{\infty} = \|\mathbf{Q}_{GS}\|_{\infty} = \\ &= \|(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{B}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 16 & 404 \\ 5 & 45 & 585 \end{bmatrix}^T \right\|_{\infty} = \frac{404}{585} \end{aligned}$$

dove

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{45} & \frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{28}{585} & -\frac{16}{117} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Si osserva che il **metodo di Gauss-Seidel converge molto piú velocemente del metodo di Jacobi**

Ripetere per $\|C_{GS}\|_1$.

Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_2 + 4x_3 & = & 20 \end{cases}$$

stabilire se è possibile risolverlo usando il **metodo di Jacobi** per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

Soluzione

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Si osserva subito che A non è a diagonale dominante nè per righe nè per colonne.

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale risulta

$$\|C_J\|_\infty = \max\{4, 4, 1/2\} = 4 > 1$$

$$\|C_J\|_1 = \max\{3, 9/2, 1\} = 3 > 1$$

$$\rho(C_J) = \max_i |\lambda_i| = 5/\sqrt{2} > 1$$

infatti $\det(C_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda/2 + 12\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 25/2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 5/\sqrt{2}$ e quindi $\max_i |\lambda_i| = 5/\sqrt{2}$.

Quindi il metodo di Jacobi **non converge**.

Tuttavia, **scambiando la prima e la seconda equazione del sistema**, si ottiene un sistema equivalente la cui matrice dei coefficienti è data da

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

alla quale è associata la seguente matrice di iterazione del metodo di Jacobi

$$\hat{C}_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale risulta

$$\|\hat{C}_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{2}{3} < 1$$

$$\|\hat{C}_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{5}{6} < 1$$

$$\rho(\hat{C}_J) = \max_i |\lambda_i| = 0.4257 < 1.$$

In questo caso il metodo di Jacobi **converge per ogni scelta della approssimazione iniziale.**

Inoltre, la **velocità di convergenza** del metodo è

$$-\text{Log}(\rho(\hat{C}_J)) = -\text{Log}(0.4257) = 0.8540$$

e l'errore di approssimazione si riduce di un fattore **10^{-m}** all'iterazione

$$K \approx -\frac{m}{\text{Log}(\rho(\hat{C}_J))} = \frac{m}{0.8540}.$$

Metodo di rilassamento (S.O.R.)

Il metodo di Gauss-Seidel può essere generalizzato introducendo un *parametro di rilassamento* $\omega \neq 0$ nella decomposizione della matrice A :

$$A = L + \frac{D}{\omega} - \frac{D}{\omega} + D + U \quad \omega \in \mathbb{R}^+$$

e ponendo

$$M = \frac{D}{\omega} + L$$

e

$$N = U - \frac{D}{\omega}(1 - \omega)$$

da cui

$$\begin{cases} C_\omega = -\left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1} \left(U - \frac{D}{\omega}(1 - \omega)\right) \\ Q_\omega = \left(\frac{D}{\omega} + L\right)^{-1} B \end{cases}$$

e quindi

$$X^{(k)} = C_\omega X^{(k-1)} + Q_\omega =$$

$$= (D + \omega L)^{-1} (-\omega U + (1 - \omega)D)X^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1}B$$



Algoritmo S.O.R. (successive over relaxation)

$$v_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega v_i^{(k)} + (1 - \omega)x_i^{(k)}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq 0$$

$v_i^{(k)}$ è la soluzione del metodo di Gauss-Seidel mentre

$x_i^{(k+1)}$ è la somma pesata di $v_i^{(k)}$ e $x_i^{(k)}$ usando i pesi ω e $1 - \omega$,

con $x_i^{(k)}$ *i-esima* componente della soluzione calcolata al passo precedente

Se $\omega = 1$, il metodo S.O.R. coincide con il metodo di Gauss-Seidel.

Convergenza del metodo di sovrarilassamento

Teorema. Se A è (simmetrica) **definita positiva**, la condizione $\omega \in (0, 2)$ è **necessaria** e **sufficiente** per la convergenza.

Teorema. Se A è (simmetrica) **definita positiva** e **tridiagonale** allora la **velocità di convergenza** è **massima** per

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(C_{GS})}}$$

Esercizio

Si tratta di risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2p_1 & -p_2 & & & & & & = & 1 \\ -p_1 & +2p_2 & -p_3 & & & & & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & -p_{N-3} & +2p_{N-2} & -p_{N-1} & & = & 0 \\ & & & & -p_{N-2} & +2p_{N-1} & & = & 0 \end{cases}$$

nelle incognite p_i , $i = 1, \dots, N - 1$.

La soluzione esatta è $p_i = 1 - \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$.

Per il **metodo di Jacobi** si ha:

N	$\ C_J\ _1$	$\ C_J\ _\infty$	$\rho(C_J)$	$\ X^{(50)} - X^{(49)}\ _\infty$	$\ E^{(50)}\ _\infty$	decimali esatti
11	1	1	0.9595	$0.64 \cdot 10^{-2}$	$0.77 \cdot 10^{-1}$	0
21	1	1	0.9888	$0.95 \cdot 10^{-2}$	0.36	0
51	1	1	0.9981	$0.95 \cdot 10^{-2}$	0.68	0
101	1	1	0.9995	$0.95 \cdot 10^{-2}$	0.81	0

Per il **metodo di Gauss-Seidel** si ha:

N	$\ C_{GS}\ _1$	$\ C_{GS}\ _\infty$	$\rho(C_{GS})$	$\ X^{(50)} - X^{(49)}\ _\infty$	$\ E^{(50)}\ _\infty$	decimali esatti
11	0.9990	0.9980	0.9206	$0.69 \cdot 10^{-3}$	$0.80 \cdot 10^{-2}$	1
21	1	1	0.9778	$0.42 \cdot 10^{-2}$	0.18	0
51	1	1	0.9962	$0.44 \cdot 10^{-2}$	0.55	0
101	1	1	0.9990	$0.44 \cdot 10^{-2}$	0.73	0

Per il **metodo S.O.R.** si ha:

N	ω	$\ C_\omega\ _1$	$\ C_\omega\ _\infty$	$\rho(C_\omega)$	$\ X^{(50)} - X^{(49)}\ _\infty$	$\ E^{(50)}\ _\infty$	decimali esatti
11	0.5	0.9999	0.9999	0.9733	$0.41 \cdot 10^{-2}$	0.15	0
11	1.5604	2.34	1.34	0.56	$1.02 \cdot 10^{-12}$	$1.24 \cdot 10^{-12}$	11
11	1.8	5.21	1.7	0.8	$8.2 \cdot 10^{-6}$	$6.29 \cdot 10^{-6}$	5
21	0.5	0.9999	0.9999	0.9926	$0.4 \cdot 10^{-2}$	0.43	0
21	1.7406	5.35	1.61	0.7400	$0.32 \cdot 10^{-6}$	$0.89 \cdot 10^{-6}$	6
21	1.8	7.02	1.7	0.8	$2.65 \cdot 10^{-6}$	$6.29 \cdot 10^{-6}$	5
51	0.5	1	1	0.9987	$0.46 \cdot 10^{-2}$	0.71	0
51	1.8849	14.47	1.82	0.8840	$0.22 \cdot 10^{-2}$	$0.41 \cdot 10^{-2}$	2
51	1.8	7.95	1.7	0.9634	$0.26 \cdot 10^{-2}$	$0.69 \cdot 10^{-1}$	1
101	0.5	1	1	0.9997	$0.45 \cdot 10^{-2}$	0.84	0
101	1.9397	29.70	1.90	0.9396	$0.69 \cdot 10^{-2}$	0.05	1
101	1.8	8	1.70	0.9912	$0.37 \cdot 10^{-2}$	0.34	0

Si può verificare che dopo **15** iterazioni, scegliendo $\omega = \omega_{ott}$, il numero di decimali esatti della soluzione è **3** nel caso $N = 11$.

Esercizi d'esame

ESERCIZIO 1

Dato il sistema lineare

$$GY = F \quad G = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \beta \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 1.1) individuare per quali valori dei parametri α e β la matrice G è definita positiva;
- 1.2) posto $\alpha = 1$ e $\beta = 1/4$ stabilire se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono adatti ad approssimare la soluzione del sistema lineare;
- 1.3) in caso di convergenza, specificare per ciascun metodo la scelta dell'approssimazione iniziale.

Soluzione ESERCIZIO 1

1.1) La matrice G è definita positiva se è simmetrica e se $X^T G X \geq 0$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$. Per la simmetria deve essere $\alpha = 1$. Per verificare se G è definita positiva si può utilizzare il criterio di Sylvester:

$$\det G_1 = 3 \quad \det G_2 = 5 \quad \det G_3 = \det G = 5\beta - \frac{3}{4}$$

I primi due determinanti principali di testa sono positivi. Il determinante di G è positivo se e solo se

$$5\beta - \frac{3}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > \frac{3}{20} = 0.15$$

1.2) Per $\alpha = 1$ e $\beta = 1/4$ la matrice

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

è definita positiva, quindi il metodo di Gauss-Seidel converge sicuramente. Poiché la matrice G non è diagonalmente dominante né per righe né per colonne, non si può trarre nessuna conclusione sulla convergenza del metodo di Jacobi analizzando le proprietà della matrice dei coefficienti.

Per quanto riguarda la matrice di iterazione del metodo, data da

$$C_J = -D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

sia la norma 1 che la norma uniforme sono maggiori di 1. Per verificare la convergenza bisogna quindi calcolare il raggio spettrale, cioè il massimo dei moduli degli autovalori di C_j :

$$\rho(C_J) = \max\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.8165 < 1,$$

quindi anche il metodo di Jacobi è convergente.

1.3) La convergenza dei metodi è indipendente dalla scelta dell' approssimazione iniziale $X^{(0)} \in \mathbf{R}^3$. Una buona scelta può essere $X^{(0)} = 0$ per il metodo di Gauss-Seidel, del quale non è stata calcolata la matrice di iterazione, e $X^{(0)} = D^{-1}F = Q_J$ per il metodo di Jacobi.

Si suggerisce di fare qualche iterazione di entrambi i metodi per confrontare le differenti velocità di convergenza.

ESERCIZIO 2

Sia dato un sistema lineare con matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 2 & 1 \\ -\alpha & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro reale α , e vettore dei termini noti

$$\mathbf{b} = [5 \quad -2 \quad 1]^T:$$

- 2.1) stabilire per quali valori del parametro α il metodo di Jacobi converge per ogni scelta della approssimazione iniziale $\mathbf{X}^{(0)}$;
- 2.2) scelti $\alpha = \frac{5}{2}$ e $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, produrre una stima superiore del numero di iterazioni necessarie affinché il metodo fornisca una soluzione con almeno 5 decimali esatti.

Soluzione Esercizio 2

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{2\alpha} \\ \frac{\alpha}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$\forall \alpha \neq 0$, mentre il termine noto è $Q = [\frac{5}{2\alpha} \quad -\frac{2}{5} \quad \frac{1}{\alpha}]^T$.

Affinchè il metodo di Jacobi converga per ogni scelta del punto iniziale, è necessario che $\|C\|_{\infty} < 1$.

$$\|C\|_{\infty} = \max\left\{\frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{2|\alpha|}, \frac{|\alpha| + 2}{5}, \frac{2}{|\alpha|}\right\} = \max\left\{\frac{3}{2|\alpha|}, \frac{|\alpha| + 2}{5}, \frac{2}{|\alpha|}\right\}.$$

Poichè $\frac{3}{2|\alpha|} < \frac{2}{|\alpha|}$, $\forall \alpha \neq 0$,

$$\|C\|_{\infty} = \max\left\{\frac{|\alpha| + 2}{5}, \frac{2}{|\alpha|}\right\}.$$

Quindi,

$$\|C\|_{\infty} = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|} & \text{se } \frac{|\alpha|+2}{5} < \frac{2}{|\alpha|} \\ \frac{|\alpha|+2}{5} & \text{viceversa} \end{cases}$$

cioè

$$\|C\|_{\infty} = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|} & \text{se } |\alpha|^2 + 2|\alpha| - 10 < 0 \\ \frac{|\alpha|+2}{5} & \text{viceversa} \end{cases}$$

da cui

$$\|C\|_{\infty} = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|} & \text{se } |\alpha| < \sqrt{11} - 1 \\ \frac{|\alpha|+2}{5} & \text{se } |\alpha| \geq \sqrt{11} - 1 \end{cases}$$

Imponendo $\|C\|_\infty < 1$ risulta

$$\begin{cases} |\alpha| > 2 & \text{se } |\alpha| < \sqrt{11} - 1 \\ |\alpha| < 3 & \text{se } |\alpha| \geq \sqrt{11} - 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che il metodo di Jacobi converge in norma infinito se $2 < |\alpha| < 3$.

Il numero di iterazioni k necessarie affinché la soluzione abbia la precisione ϵ è maggiorabile come segue

$$k > \log \left(\frac{(1 - \|C\|_\infty)\epsilon}{\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|_\infty} \right) \frac{1}{\log(\|C\|_\infty)}.$$

In questo caso, $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$, $\|C\|_\infty = \frac{5+2}{5} = \frac{9}{10}$ mentre

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} = \left[1 \quad -\frac{2}{5} \quad \frac{2}{5} \right]^T$$

e quindi $\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|_\infty = \|\mathbf{X}^{(1)}\|_\infty = 1$. Ne risulta che

$$k > \frac{\log((1 - 9/10) \cdot 0.5 \cdot 10^{-5})}{\log(9/10)} = 137.70.$$

Quindi, il numero minimo di iterazioni per raggiungere la precisione richiesta è $k = 138$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema lineare $\mathbf{A}_n \mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$, con

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} + 1 \\ \frac{n}{2} + 1 & \frac{n}{2} + 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} b_{1,n} \\ b_{2,n} \end{bmatrix}$$

- 3.1) Valutare il numero di condizionamento di \mathbf{A}_n al variare di n ;
- 3.2) stabilire per quali n il numero di condizionamento risulta inferiore a 50;
- 3.3) sia \bar{n} il valore piú grande di n verificante la condizione al punto (2.2). Dare una maggiorazione in norma ∞ dell'errore relativo su

\mathbf{x} nel caso in cui la soluzione del sistema sia $\mathbf{x} = [1, 1]^T$ e il vettore $\mathbf{b}_{\bar{n}}$ subisca una perturbazione pari a

$$\delta \mathbf{b}_{\bar{n}} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-2} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Soluzione ESERCIZIO 3

3.1) La matrice \mathbf{A}_n è simmetrica e tutti i suoi elementi sono non negativi. Ne segue che $\|\mathbf{A}_n\|_1 = \|\mathbf{A}_n\|_\infty = \max\{n+1, n+3\} = n+3$.

Inoltre, risulta

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}_n)} \begin{bmatrix} \frac{n}{2} + 2 & -\frac{n}{2} - 1 \\ -\frac{n}{2} - 1 & \frac{n}{2} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\|\mathbf{A}_n^{-1}\|_1 = \|\mathbf{A}_n^{-1}\|_\infty$$

in quanto si verifica facilmente che $\det(\mathbf{A}_n) = -1$, $\forall n$. Ne segue che il numero di condizionamento di \mathbf{A}_n risulta

$$K(\mathbf{A}_n) = (n+3)^2,$$

rispetto alle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$, quindi il sistema diventa mal condizionato anche per piccoli valori di n .

3.2)

$$K(\mathbf{A}_n) = (n + 3)^2 < 50 \Leftrightarrow n < \sqrt{50} - 3.$$

Poichè $n \in \mathbf{N}$, risulta $n \leq 4$.

3.3) Si osserva che $\bar{n} = 4$. Poichè $\mathbf{x} = [1 \quad 1]^T$, risulta

$$\mathbf{b}_{\bar{n}} = [\bar{n} + 1 \quad \bar{n} + 3]^T.$$

Quindi, $\frac{\|\delta \mathbf{b}_{\bar{n}}\|_{\infty}}{\|\mathbf{b}_{\bar{n}}\|_{\infty}} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\bar{n} + 3}$ e

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}} \leq K(\mathbf{A}_{\bar{n}}) \frac{\|\delta \mathbf{b}_{\bar{n}}\|_{\infty}}{\|\mathbf{b}_{\bar{n}}\|_{\infty}} = (\bar{n} + 3)^2 \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\bar{n} + 3} = 5 \cdot 10^{-2} (\bar{n} + 3) = 3.5 \cdot 10^{-1}.$$

ESERCIZIO 4

Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \gamma, \delta \in \mathbf{R}.$$

- 4.1) Dopo una opportuna permutazione delle righe, individuare i valori dei parametri γ e δ per i quali la matrice \mathbf{A} risulti definita positiva;
- 4.2) Sia \mathbf{B} la matrice definita positiva costruita al punto precedente. Determinare per quali valori dei parametri il numero di condizionamento della matrice \mathbf{B} risulta minore di 7.

Soluzione ESERCIZIO 4

4.1) Con una permutazione delle righe della matrice \mathbf{A} si ottiene la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \gamma & \delta \\ -1 & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

che risulta simmetrica per $\gamma = -1$ e $\delta = 0$. Si verifica facilmente che per questi valori dei parametri la matrice \mathbf{B} è definita positiva.

4.2) Poichè la matrice \mathbf{B} è simmetrica, il numero di condizionamento in norma 1 o infinito sono coincidenti:

$$K(\mathbf{B}) = \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{B}^{-1}\| \approx 2.95.$$

Si suggerisce di calcolare il numero di condizionamento in norma 2.

ESERCIZIO 5 Dato il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1/2 \\ 0 & 2\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\alpha \neq 0$,

5.1) stabilire per quali valori del parametro α i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono alla soluzione del sistema per qualsiasi scelta della approssimazione iniziale;

5.2) posto $\alpha = 8$, in caso di convergenza dei metodi, stimare il numero minimo di iterazioni necessarie affinché l'errore relativo soddisfi

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}\|} < 10^{-8}$$

dove \mathbf{x}_k è l'approssimazione prodotta alla k -esima iterazione.

ESERCIZIO 6

Dato il sistema lineare

$$H A = Y \quad H = \begin{bmatrix} \theta & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \gamma & 3 \end{bmatrix} \quad \gamma, \theta \in \mathbf{R} \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 6.1)** individuare per i quali valori dei parametri γ e θ la matrice H è definita positiva;
- 6.2)** posto $\gamma = -1/2$ e $\theta = 2/3$ stabilire se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono adatti ad approssimare la soluzione del sistema lineare;
- 6.3)** in caso di convergenza, specificare per ciascun metodo la scelta dell'approssimazione iniziale.

ESERCIZIO 7

- 7.1) Illustrare in dettaglio un metodo di stima dell'errore commesso sulla soluzione di un sistema lineare in presenza di errori sui dati. Dare un esempio di matrice mal condizionata e uno di matrice ben condizionata.
- 7.2) Si consideri il sistema lineare di n equazioni in n incognite $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, con matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e vettore dei termini noti $\mathbf{B} = (1, 0, \dots, 0)^T$.

- Stabilire se esistono valori di n per cui il metodo di Jacobi sicuramente converge alla soluzione del sistema perturbato $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{B}$, con $\delta\mathbf{A} = \text{diag}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$;
- scelto n pari all'intero per cui $\|\delta\mathbf{A}\|_\infty = \frac{1}{2}$, dare una maggioranza dell'errore relativo $\frac{\|\delta\mathbf{X}\|_\infty}{\|\mathbf{X}\|_\infty}$.

ESERCIZIO 8

- 8.1 Illustrare i teoremi di convergenza dei metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari e descrivere un metodo di stima a priori del numero di iterazioni necessarie affinché l'approssimazione abbia un numero stabilito di decimali esatti.
- 8.2 Discutere la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss Seidel del seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 8.3 Detto $\bar{A}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{b}}$ un sistema lineare equivalente al precedente per il quale il metodo di Jacobi converge per ogni scelta dell'approssimazione iniziale, stabilire se esistono valori del parametro $\beta \in \mathbf{R}$ per cui il metodo iterativo

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \beta(\bar{A}\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{b}})$$

converge più velocemente del metodo di Jacobi.

Soluzione

Siano \mathbf{A} la matrice del sistema, \mathbf{x} il vettore della soluzione e \mathbf{b} il vettore dei termini noti. La matrice \mathbf{A} non soddisfa le condizioni sufficienti di convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel. In particolare, \mathbf{A} non è a diagonale dominante per righe o per colonne (una condizione sufficiente per la convergenza dei due metodi iterativi), e neanche simmetrica e definita positiva (condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Gauss Seidel). Tuttavia, scambiando la seconda e la terza riga della matrice \mathbf{A} , si ottiene la matrice

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che risulta a diagonale dominante per righe e per colonne. Inoltre è simmetrica e definita positiva; infatti il determinante dei minori di testa di $\bar{\mathbf{A}}$ è positivo:

$$\det(\bar{\mathbf{A}}_1) = 2 > 0; \quad \det(\bar{\mathbf{A}}_2) = 6 - 1 = 5 > 0; \quad \det(\bar{\mathbf{A}}) = 12 - 4 = 8 > 0.$$

Ne segue che i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono alla soluzione del sistema $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{b}}$, con

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso, la matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$\mathbf{C}_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

il cui raggio spettrale $\rho(\mathbf{C}_J) = \max \{|\lambda_i|\}_{1 \leq i \leq 3} = 1/\sqrt{3}$. Infatti, gli autovalori λ_i di \mathbf{C}_J sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $-\lambda^3 + \lambda/3 = 0$.

La matrice di iterazione del metodo iterativo

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \beta(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{b}})$$

è $\mathbf{C}(\beta) = \mathbf{I} - \beta\bar{\mathbf{A}}$, con \mathbf{I} matrice identità. Affinchè il metodo converga più velocemente del metodo di Jacobi, deve esistere almeno un β per cui

$$\rho(\mathbf{C}(\beta)) < \rho(\mathbf{C}_J), \quad (*)$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{C}(\beta)$ sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$(1 - 2\beta - \lambda)^2(1 - 3\beta - \lambda) - 2\beta^2(1 - 2\beta - \lambda) = 0,$$

ovvero

$$(1 - 2\beta - \lambda)(\lambda^2 - \lambda(2 - 5\beta) + 4\beta^2 - 5\beta + 1) = 0$$

cioè $\lambda_1 = 1 - 2\beta$, $\lambda_{2,3} = \frac{2-5\beta \pm 3\beta}{2}$ e quindi $\lambda_2 = 1 - \beta$, $\lambda_3 = 1 - 4\beta$. Ne segue che $\rho(\mathbf{C}(\beta)) < 1 \Leftrightarrow 0 < \beta < 1/2$ e

$$\rho(\mathbf{C}(\beta)) = \begin{cases} 1 - \beta & \beta \leq 2/5 \\ 4\beta - 1 & \beta > 2/5 \end{cases}$$

Poichè

$$1 - \beta < 1/\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta > 1 - 1/\sqrt{3} \approx 0.4226 > 2/5$$

e

$$4\beta - 1 < 1/\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta < (1 + 1/\sqrt{3})/4 \approx 0.3943 < 2/5,$$

non esistono valori di β per cui il metodo iterativo considerato converge più velocemente del metodo di Jacobi.

Oss: Alla stessa conclusione si giunge ragionando come segue.

Poichè per una generica matrice \mathbf{M} risulta $\rho(\mathbf{M}) \leq \|\mathbf{M}\|$, con $\|\cdot\|$ norma di matrice compatibile, la (*) è sicuramente verificata per i valori di β tali che

$$\|\mathbf{C}(\beta)\|_{\infty} < \rho(\mathbf{C}_J),$$

cioè

$$\max |1 - 2\beta| + |\beta|, |1 - 3\beta| + 2|\beta| < 1/\sqrt{3}$$

ovvero

$$|1 - 3\beta| + 2|\beta| < 1/\sqrt{3}$$

che non è mai soddisfatta.

Tuttavia, in questo caso non si può concludere che non esiste alcun valore di β per cui il metodo iterativo considerato converge più velocemente del metodo di Jacobi.

ESERCIZIO 9

9.1 Illustrare il problema della soluzione di sistemi di equazioni lineari con particolare riferimento ai metodi diretti.

9.2 Si considerino i seguenti sistemi lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_4 = 2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 9x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ -6x_1 + 6x_3 = 1 \end{array} \right. .$$

Stabilire per quali di essi il metodo di eliminazione di Gauss senza pivoting fornisce la soluzione esatta. Motivare la risposta.

ESERCIZIO 10

10.1 Illustrare il problema della soluzione di sistemi di equazioni lineari con particolare riferimento ai metodi diretti.

10.2 Dati i seguenti sistemi lineari dipendenti dal parametro $k \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 = 1 - k \\ -kx_1 + x_2 - kx_3 = 1 - 2k \\ -x_2 + x_3 = 1 - k \end{cases}, \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = -1 \\ 0.5x_1 + 2x_2 - 0.5x_3 = 2 \\ \sqrt{2}x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} kx_1 - x_2 + kx_3 = 1 \\ -x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 - x_2 = 1 \end{cases},$$

stabilire per quali valori di k è possibile calcolarne la soluzione in modo esatto usando il metodo di Thomas.

ESERCIZIO 11

11.1 Illustrare dettagliatamente i metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari.

11.2 Stabilire se i seguenti metodi iterativi

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A})\mathbf{X}^{(k)} + \beta\mathbf{B}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \beta((1 - \alpha)\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}^{(k)} + \beta\mathbf{B}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{A})\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{B}, \quad \text{con } \mathbf{D} \text{ matrice diagonale: } D_{ii} = A_{ii}, \forall i$$

possono convergere alla soluzione del sistema lineare $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ per ogni scelta dell'approssimazione iniziale \mathbf{X}^0 . Motivare la risposta.

ESERCIZIO 12 Si consideri il seguente procedimento iterativo dipendente dal parametro reale ω :

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{D}(\omega)\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{F}(\omega),$$

$$\text{con } \mathbf{D}(\omega) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\omega^2 + 2\omega + 1 & -2\omega^2 + 2\omega + 1 \\ -2\omega^2 + 2\omega + 1 & 2\omega^2 + 2\omega + 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{F}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \omega \\ \frac{1}{2} - \omega \end{pmatrix}.$$

12.1 Stabilire se esiste almeno un valore di ω per cui il procedimento iterativo risulta adatto ad approssimare la soluzione del sistema lineare $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

12.2 in caso di risposta affermativa, determinare il valore di ω per cui la velocità di convergenza al vettore \mathbf{X} è massima;

12.3 stabilire se il procedimento iterativo è adatto ad approssimare la soluzione del sistema perturbato $\mathbf{AX} = \bar{\mathbf{B}}$ con $\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 5.1 \end{pmatrix}$. Motivare la risposta.

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*:

Cap. 2 §§ 2.10 - 2.11

Cap. 4 §§ 4.4-4.5-4.6

L. Gori, M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, *Esercizi di Calcolo Numerico*:

2.19 - 2.26, 2.30, 7.7, 7.16, 7.19, 7.35, 7.41, 7.49, 7.57, 7.58, 7.64