Metodi Numerici con elementi di Programmazione
(A.A. 2013-2014)

Metodi Numerici

Appunti delle lezioni: Sistemi non lineari

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

http://ingaero.uniroma1.it/

nella pagina dedicata al corso Metodi Numerici con elementi di Programmazione

Sistemi di equazioni non lineari

Un sistema di equazioni non lineari può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

La **soluzione** del sistema è il vettore $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]^T$ le cui componenti **annullano simultaneamente** le n equazioni del sistema.

Supporremo che le funzioni $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n,$ siano almeno **continue** in D

Metodo di Newton per sistemi

Sistema non lineare: $\boxed{F(X) = 0 \qquad X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T}$

Il **metodo di Newton** per la soluzione di sistemi non lineari si basa sulla **linearizzazione** della $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]^T$

Se le funzioni $f_i(X)$ hanno **derivate parziali limitate**, allora si può sviluppare in **serie di Taylor** la funzione vettoriale $F(X)$ scegliendo come punto iniziale $X^{(k)}$

$$F(X) = F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)})\,(X - X^{(k)}) + \ \dots$$

dove $[J_F(X)]_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ è lo **jacobiano** della $F(X)$

$$\Rightarrow \quad F(X^{(k+1)}) \approx F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)})\,(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0$$

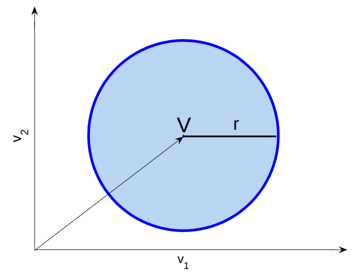
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X^{(0)} & \text{dato} \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[J_F(X^{(k)})\right]^{-1} F(X^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

Norma di vettore

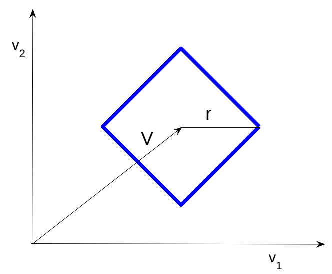
La **norma** di un vettore $V = [v_1, \ldots, v_n]^T$ viene utilizzata per "*misurare*" la sua **lunghezza**.

Intorno: $\|V - W\| \leq r$

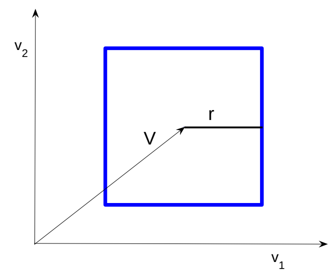
- **Norma due o euclidea:** $\|V\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$



- **Norma uno:** $\|V\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$



- **Norma infinito:** $\|V\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$



Nota. Tutte le norme sono **equivalenti**: $m\|V\|_p \leq \|V\|_q \leq M\|V\|_p$

Proprietà della norma di vettore

- $\|V\| \geq 0, \quad \|V\| = 0 \Longleftrightarrow V = 0$
- $\|\alpha V\| = |\alpha| \cdot \|V\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R},\ \forall\, V \in \mathbf{R}^n$
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall\, V, W \in \mathbf{R}^n$ *(disuguaglianza triangolare)*

Distanza: in uno **spazio vettoriale normato** S è possibile introdurre la **distanza** tra due punti V e W in S

$$d(V, W) := \|V - W\|$$

Proprietà della distanza:

- $d(V, W) = 0 \iff V = W$
- $d(V, W) = d(W, V) \qquad \forall\, V, W \in S$
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W) \qquad \forall\, V, W, Z \in S$

Convergenza del metodo di Newton

Il **metodo di Newton** è un **metodo iterativo** la cui **funzione di iterazione** è $\mathbf{\Phi}(X) = X - [J_F(X)]^{-1} F(X)$

Teorema. Sia $\overline{X}$ una soluzione del sistema non lineare

$$F(X) = 0$$

con $F \in C^2(I)$ ($I \in \mathbf{R}^n$ intorno di $\overline{X}$).

Sia $\det J_F(X) \neq 0$ per $X \in I$.

$\Rightarrow$ **i)** $\exists\, A \subseteq I$ tale che, $\forall\, X^{(0)} \in A$, la successione $\{X^{(k+1)}\} = \{\mathbf{\Phi}(X^{(k)})\}$ **converge** a $\overline{X}$;

ii) la convergenza è **quadratica**: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{||E^{(k+1)}||}{||E^{(k)}||^2} > 0.$

Osservazioni sul metodo di Newton per sistemi

- La **convergenza** del metodo è legata all'**accuratezza** dell'**approssimazione iniziale**.

- Ad ogni passo bisogna verificare che $\det J_F(X^{(k)}) \neq 0$. Nella pratica, si può avere **instabilità** numerica se $\det J_F(X^{(k)})$ è "*piccolo*" $\longrightarrow$ conviene utilizzare una **precisione elevata**.

- Poiché il **costo computazionale** del calcolo di $\det J_F(X^{(k)})$ può essere **elevato**, si preferisce risolvere ad ogni passo il sistema lineare
$$J_F(X^{(k)})Y = -F(X^{(k)}) \Rightarrow X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y$$

- **Criterio di arresto**: il procedimento iterativo viene arrestato quando $||X^{(k+1)} - X^{(k)}|| \leq \epsilon$.

- A volte si preferisce ricalcolare $J_F(X^{(k)})$ non ad ogni iterazione ma **dopo 3-4 iterazioni** (metodi di tipo quasi-Newton).

Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

Per $n = 2$ si ha: $\begin{cases} f(X) = f(x, y) = 0 \\ g(X) = g(x, y) = 0 \end{cases}$

Formula di Taylor di punto iniziale $X^{(k)} = [x_k, y_k]^T$:

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(X) = f(X^{(k)}) + f_x(X^{(k)})(x - x_k) + f_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_1 = 0 \\ g(X) = g(X^{(k)}) + g_x(X^{(k)})(x - x_k) + g_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_2 = 0 \end{cases}$$

dove $R_1 = R_1(X, X^{(k)})$, $R_2 = R_2(X, X^{(k)})$ rappresentano il **resto**.

La **soluzione approssimata** del sistema non lineare è la soluzione del **sistema lineare** che si ottiene trascurando il resto nello sviluppo precedente.

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$J_F^{(k)}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -F(X^{(k)})$$

dove $J_F^{(k)} := J_F(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} f_x(X^{(k)}) & f_y(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)}) & g_y(X^{(k)}) \end{bmatrix}$

Il **sistema lineare** ammette soluzione se

$$|J_F^{(k)}| = \det J_F^{(k)} \neq 0$$

La soluzione è

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{1}{|J_F^{(k)}|} \left[f(X^{(k)})\, g_y(X^{(k)}) - g(X^{(k)})\, f_y(X^{(k)}) \right] \\ \\ y_{k+1} = y_k - \dfrac{1}{|J_F^{(k)}|} \left[g(X^{(k)})\, f_x(X^{(k)}) - f(X^{(k)})\, g_x(X^{(k)}) \right] \end{cases}$$

Esempio

Determinare i punti di intersezione tra il cerchio $x^2+y^2=3$ e l' iperbole $xy=1$ con 5 decimali esatti.

Soluzione

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni $f(x,y)=x^2+y^2-3$ e $g(x,y)=xy-1$.

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2+y^2-3=0 \\ g(x,y)=xy-1=0 \end{cases}$$

Separazione grafica: Le due funzioni hanno 4 punti di intersezione: 2 nel primo quadrante e 2 nel terzo.

Ne segue che, detti $\xi_1 = (x_1, y_1)$ e $\xi_2 = (x_2, y_2)$ i punti di intersezione nel primo quadrante, i rimanenti due sono:

$$\xi_3 = (-x_1, -y_1) \quad \text{e} \quad \xi_4 = (-x_2, -y_2).$$

Inoltre, se il punto di coordinate (x_1, y_1) è uno zero sia di f che di g, lo è anche il punto di coordinate (y_1, x_1). Ne segue che

$$\xi_2 = (x_2, y_2) = (y_1, x_1).$$

Il punto $\xi_1 = (x_1, y_1)$ è contenuto in $I_1 = [0, 1] \times [1, \sqrt{3}]$.

Si verifica facilmente che $F(x,y) = [f(x,y), g(x,y)]^T \in C^2(I_1)$.

Inoltre

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x,y)| = 2x^2 - 2y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow \quad |J_F(x,y)| \neq 0 \quad \text{in} \quad I_1.$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

Scegliendo il punto $X^{(0)} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ come approssimazione iniziale della soluzione si ha

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{1}{|J_F(x_0,y_0)|}\left[\, f(x_0,y_0)\, g_y(x_0,y_0) - g(x_0,y_0)\, f_y(x_0,y_0)\,\right] \\ \\ y_1 = y_0 - \dfrac{1}{|J_F(x_0,y_0)|}\left[\, g(x_0,y_0)\, f_x(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\, g_x(x_0,y_0)\,\right] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4} - 3\right)\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2} - 1\right) 2\dfrac{3}{2}\right] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8} \\ \\ y_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{3}{4} - 1\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\right] = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 0.00694 = 0.61806 \\ \\ y_2 = y_1 - 0.00694 = 1.61806 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 0.00003 = 0.61803 \\ \\ y_3 = y_2 - 0.00003 = 1.61803 \end{cases}$$

Esercizio

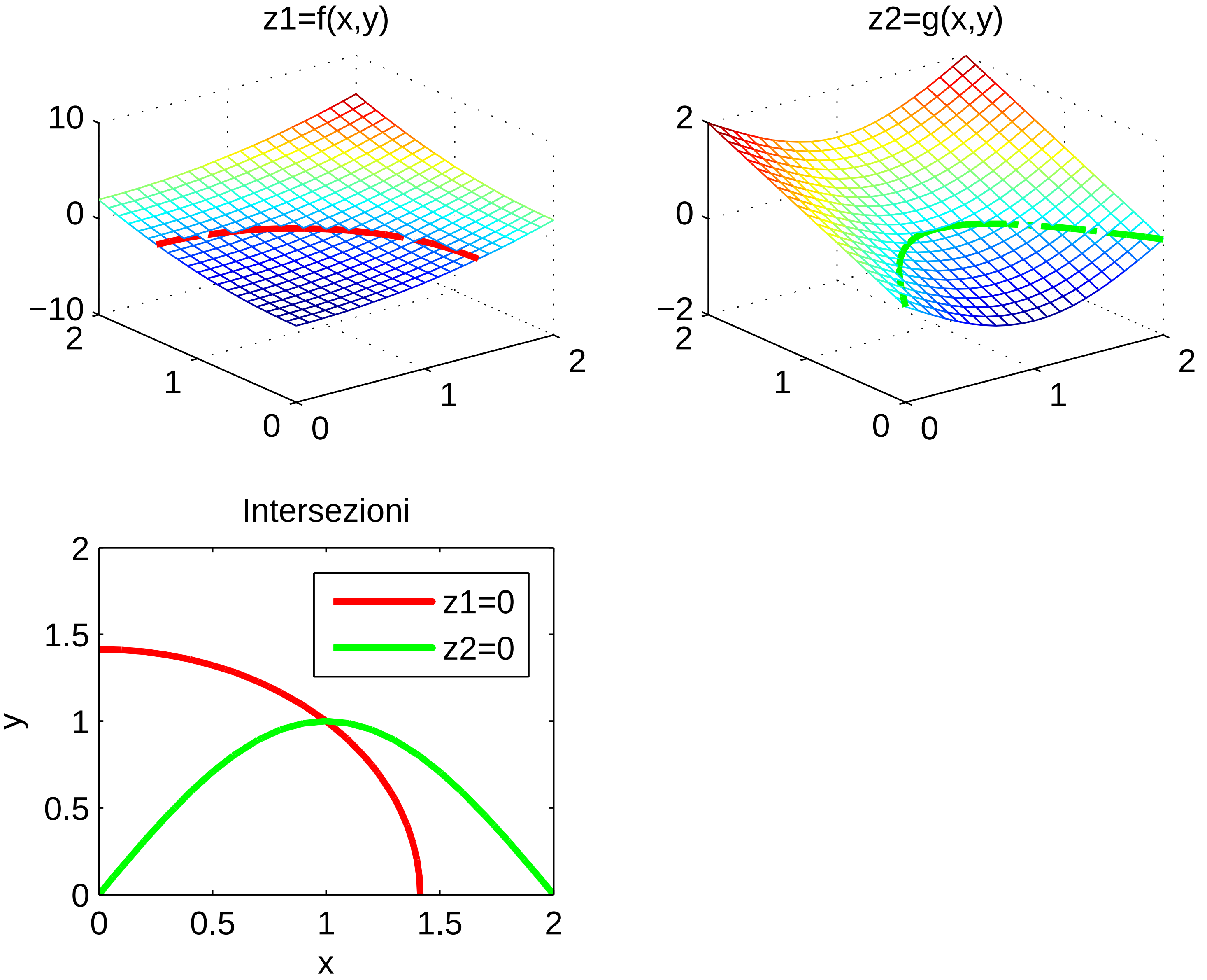
Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, \end{cases}$$

stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

Soluzione

E' necessario determinare un opportuno intervallo I in cui la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ del sistema sia unica. Disegnando il grafico delle due funzioni, limitandoci al primo quadrante, possiamo concludere che $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$ è un buon intervallo di separazione



Inoltre, le funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x,y) = y - sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sono

$C^2(I)$, mentre la matrice Jacobiana

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 1 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$|J_F(x,y)| = 2x + \pi y cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$$

in un intorno opportuno del punto $(1,1)$ contenuto in I; infatti,

$$|J_F(1,1)| = 2 + 0 > 0.$$

Possiamo concludere che sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**.

Esercizio

Mostrare che risolvere il sistema precedente è equivalente a risolvere la seguente equazione non lineare

$$x^2 + sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2.$$

Risolvere l'equazione precedente usando il metodo di Newton-Raphson e confrontare il risultato con la soluzione del sistema ottenuta risolvendo il sistema con il metodo di Newton

Esercizio

- Determinare i valori del parametro reale α per i quali le funzioni $f(x,y) = e^x + \alpha - y$ e $g(x,y) = x - y^2 + 1$ hanno un unico punto di intersezione $P = (\xi, \eta)$ nel semipiano $x > 0$ tale che $f(\xi,\eta) = g(\xi,\eta) = 0$;

- posto $\alpha = -3$, stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare P nel rettangolo $R = [0, 1.5] \times [-1.8, 0]$.

Soluzione: E' necessario risolvere il seguente sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} e^x + \alpha - y = 0 \\ x - y^2 + 1 = 0, \end{cases}$$

Verificare per via grafica che il sistema non lineare ha un'unica soluzione nel semipiano positivo per $-2 < \alpha < 0$.

Esercizio

Trovare le soluzioni del seguente sistema non lineare la cui ascissa appartiene all'intervallo $(0,\ 1.5)$.

$$\begin{cases} tg(x) - y = 1 \\ cos(x) - 3sin(y) = 0, \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§ 3.10

L. Gori, M.L. Lo Cascio, *Esercizi di Calcolo Numerico*: Es. 1.28, 1.29, 7.53, 7.56

Esercizi d'esame

ESERCIZIO 1

Data l'equazione non lineare

$$f(x;\lambda) = (1 - \sin x)^2 - \lambda\, x^3 = 0\,,$$

dove λ è un parametro reale,

1.1) individuare per quali valori del parametro λ l'equazione ammette un'unica radice nell'intervallo $[0,1]$.

1.2) posto $\lambda = 1/2$, determinare quante iterazioni sono necessarie ad approssimare la radice in $[0,1]$ con il metodo delle tangenti con 3 decimali esatti.

Soluzione

1.1) Si ha $f(0;\lambda) = 1 > 0$ e $f(1;\lambda) = (1-\sin(1))^2 - \lambda$. Affinché l'equazione abbia una radice nell'intervallo $[0,1]$ deve essere

$$f(1;\lambda) = (1-\sin(1))^2 - \lambda < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda > (1-\sin(1))^2 \approx 0.0251$$

Poichè per questi valori di λ si ha

$$f'(x;\lambda) = -2(1-\sin x)\cos x - 3\lambda x^2 < 0\,, \qquad x \in [0,1]\,,$$

la funzione f è monotona decrescente e la radice è unica.

1.2) Per $\lambda = 1/2$ l'equazione

$$f(x;\lambda) = (1-\sin x)^2 - \frac{1}{2}x^3 = 0\,,$$

ha un'unica radice nell'intervallo $[0,1]$ (cfr. punto precedente). Inoltre la derivata $f'(x)$ non si annulla in tale intervallo, quindi si può utilizzare il metodo delle tangenti per approssimare la radice.

Il metodo converge per un'opportuna scelta dell'approssimazione iniziale. Utilizzando come approssimazione iniziale il punto medio dell'intervallo, il metodo delle tangenti

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\,, & i = 0, 1, 2, \ldots\,, \\ x_0 = 0.5\,, \end{cases}$$

da i risultati in tabella

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
0	0.5	
1	0.661790	0.16179
2	0.664688	0.00290
3	0.664687	$0.9 \cdot 10^{-6}$

Sono sufficienti 3 iterazioni per raggiungere l'accuratezza richiesta.

ESERCIZIO 2

Data l'equazione non lineare $g(y;\lambda) = \mathrm{e}^{-y} - 2y - \lambda = 0$, dipendente dal parametro reale λ,

2.1) determinare per quali valori di λ l'equazione ammette un'unica radice nell'intervallo $I = [0, 1]$;

2.2) posto $\lambda = -2$, verificare se le funzioni di iterazione

$$\psi_1(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y} + 1 \qquad \psi_2(y) = y + \frac{\mathrm{e}^{-y} - 2y + 2}{\mathrm{e}^{-y} + 2}$$

sono adatte ad approssimare la radice nell'intervallo $D = [1, 2]$ con il metodo delle approssimazioni successive;

2.3) in caso di convergenza, specificare per ciascuna funzione la scelta dell'approssimazione iniziale.

Soluzione

2.1) La funzione $g(y;\lambda)$ è monotona decrescente per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} g(y;\lambda) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(y;\lambda) = -\infty$$

Si deduce quindi che $g(y;\lambda)$ ha un'unica radice $\xi \in \mathbf{R}$.

Si verifica facilmente che $\xi = 0$ per $\lambda = 1$ mentre $\xi = 1$ per $\lambda = \frac{1}{\mathrm{e}} - 2 \approx -1.63$, quindi $\xi \in [0,1]$ per $\frac{1}{\mathrm{e}} - 2 \leq \lambda \leq 1$.

Si suggerisce di fare lo studio grafico dell'equazione $\mathrm{e}^{-y} = 2y + \lambda$.

2.2) Per $\lambda = -2$ l'equazione diventa

$$g(y;-2) = \mathrm{e}^{-y} - 2y + 2 = 0\,.$$

Si ha $y - \psi_1(y) = y - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y} - 1 = -2\,g(y;2) = 0$,

quindi il punto unito della trasformazione ψ_1 è anche la radice dell'equazione $g(y;2) = 0$.

Per verificare se la funzione ψ_1 è adatta ad approssimare l'unica radice nell'intervallo $I = [1,2]$ bisogna verificare se soddisfa le ipotesi del teorema del punto unito. La funzione ψ_1 è monotona decrescente per cui $\forall\, y \in [1,2]$

$$1 < 1.068 \approx \psi_1(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+1 \leq \psi_1(y) \leq \psi_1(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}+1 \approx 1.184 < 2$$

Inoltre $|\psi_1'(y)| = \mathrm{e}^{-y}/2$ è monotona decrescente per cui

$$\max_{y\in[1,2]} |\psi_1'(y)| = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \approx 0.184 < 1$$

La funzione di iterazione è adatta ad approssimare la radice.

La funzione ψ_2 è la funzione di iterazione del metodo di Newton. La funzione $g(y;-2)$ è infinitamente derivabile, inoltre per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $g'(y;-2) = -\mathrm{e}^{-y} - 2 < 0$. Quindi il metodo di Newton converge per un'opportuna scelta dell'approssimazione iniziale.

2.3) Il metodo dell approssimazioni successive $y^{k+1} = \psi_1(y^k),\ k = 0, 1, \ldots$, converge per qualunque $y^{(0)} \in [1, 2]$. Poiché $g''(y; -2) = \mathrm{e}^{-y} > 0$ per ogni $y \in \mathbf{R}$, il metodo di Newton converge sicuramente se si sceglie come approssimazione iniziale l'estremo di Fourier dell'intervallo, cioè l'unico estremo per cui $g(y_0; -2)\, g''(y_0; -2) > 0$. Per la funzione in studio si ha $y_0 = 1$.

Si suggerisce di dare una stima a priori del numero di iterazioni necessarie per approssimare la radice con 3 decimali esatti utilizzando il metodo delle approssimazioni successive e di verificare tale stima eseguendo le iterazioni. Eseguire anche le iterazioni del metodo di Newton. Quale dei due metodi è piú veloce? Perchè ?

ESERCIZIO 3

Data la funzione

$$f(x) = (x^2 + \alpha)cosx + sinx, \quad x \in I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right],$$

dove α è un parametro reale,

- determinare se per $\alpha > 0$ esiste l'estremo di Fourier dell'intervallo I;

- posto $\alpha = -1$, verificare se il metodo delle tangenti è adatto ad approssimare lo zero di modulo massimo specificando, in caso di convergenza, la scelta dell'approssimazione iniziale e l'ordine di convergenza.

Soluzione:

Per $\alpha > 0$ la funzione $f(x)$ è monotona decrescente con $f(\pi/2)f(2\pi/3) < 0$, quindi $f(x)$ ha un unico zero nell'intervallo I.

L'intervallo I ha l'estremo di Fourier se $f''(x) \neq 0$ per $x \in I$. Poichè

$$f''(x) = (2 - x^2 - \alpha)cos(x) - (4x + 1)sin(x)$$

si ha $f''(\pi/2) = -2\pi - 1 < 0$ e $f''(2\pi/3) = (2 - 4\pi^2/9 - \alpha)(-1/2) - (8\pi/3 + 1)(\sqrt{3}/2) \approx -6.93 + \alpha/2$.

Quindi, $f''(2\pi/3) < 0$ se $\alpha < -2(-6.93) \approx 13.86$.

Poichè $f''(x)$ è una funzione convessa in I, per $0 < \alpha < 13.86$, f'' non si annulla in I ed esiste l'estremo di Fourier, cioè $x_0 = 2\pi/3$.

Per $\alpha = -1$ è facile verificare che esiste un unico zero in I che può essere approssimato con il metodo delle tangenti in quanto $f'(x) \neq 0$ per $x \in I$. Il metodo converge sicuramente se si sceglie come approssimazione iniziale l'estremo di Fourier dell'intervallo $x_0 = 2\pi/3$. Poichè $f''(x) \neq 0$ per $x \in I$, il metodo ha ordine di convergenza quadratica.

ESERCIZIO 4

Data la funzione

$$\eta(t) = \frac{\mathrm{e}^{Gt}}{1 + \kappa(\mathrm{e}^{Gt} - 1)} - 4\,,$$

dove G e κ sono due parametri reali non negativi,

4.1) trovare i valori di G e κ per i quali $\eta(t)$ ha un unico zero nel semipiano positivo;

4.2) posto $G = 1$ e $\kappa = 0.1$, individuare un intervallo di separazione e un metodo iterativo adatti ad approssimare lo zero positivo specificando le proprietà della successione delle approssimazioni (approssimazione iniziale, ordine di convergenza, monotonia, etc.).

ESERCIZIO 5

Data la funzione

$$f(x) = \alpha + \beta x^2 - \cos(\pi x)\,,$$

dove α e $\beta \geq 0$ sono due parametri reali,

5.1) trovare i valori di α e β per i quali $f(x)$ ha almeno uno zero nell'intervallo $I = [0, 1]$;

5.2) posto $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, individuare un intervallo di separazione di ampiezza non superiore a 0.25 adatto ad approssimare lo zero positivo con il metodo delle tangenti.

Soluzione

f è una funzione continua per ogni x reale, e lo sono anche f' e f''. Inoltre

$$f(0) = \alpha - 1 \qquad\qquad f(1) = \alpha + \beta + 1$$

Quindi f ha uno zero in $[0,\ 1]$ se

$$(\alpha - 1)(\alpha + \beta + 1) > 0 \Longleftrightarrow -(1 + \beta) < \alpha < 1$$

Poichè per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ risulta

$$f'(x) = 2x + \pi sin(\pi x) > 0 \quad \forall x \in I$$

lo zero è unico in I.

Per trovare un intervallo contenente lo zero e con ampiezza non superiore a 0.25, si valuta $f(0.5) = 1/4 > 0$ e quindi $f(1/4) = \frac{1-8\sqrt{2}}{16} < 0$. Quindi, l'intervallo cercato è $I_1 = [0.25,\ 0.5]$. Inoltre, pochè $f''(x) = 2 + \pi^2 cos(\pi x) > 0 \forall x \in I_1$, si può scegliere l'estremo di Fourier come approssimazione iniziale del metodo di Newton-Raphson, cioè $x_0 = 0.5$

ESERCIZIO 6

Data la funzione

$$f(x) = log(x + \alpha) + \sqrt{x + 4} - 1, \quad x \in \mathbf{R},$$

dove α è un parametro reale,

6.1) determinare per quali valori di α la funzione $f(x)$ ha almeno uno zero positivo;

6.2) posto $\alpha = 1/e$ (e è il numero di Nepero), verificare se le funzioni di iterazione

$$\phi_1(x) = x - \frac{log(x + e^{-1}) + \sqrt{x + 4} - 1}{\frac{1}{x+e^{-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+4}}}, \quad \phi_2(x) = (1 - log(x + e^{-1}))^2 + 4$$

sono adatte ad approssimare la radice nell'intervallo $[-0.2, 0.2]$ con il metodo delle approssimazioni successive.

ESERCIZIO 7

7.1 Descrivere dettagliatamente i metodi di punto fisso per la soluzione di equazioni non lineari e dimostrare almeno un teorema di convergenza.

7.2 Considerata la successione

$$\begin{cases} u_k = e^{u_{k-1}} - 0.5u_{k-1}^2 - u_{k-1} - 1, & k \geq 1 \\ u_0 \in [-0.5, 0.5] \end{cases},$$

determinare il valore limite

$$\lambda = \lim_{k \to +\infty} u_k.$$

ESERCIZIO 8

Si consideri la seguente equazione non lineare

$$\sqrt{x-1} - e^{\alpha x} = 0$$

dipendente dal parametro reale α.

8.1 Determinare per quali valori di α l' equazione ammette radici reali.

8.2 Posto $\alpha = -2$, proporre almeno due funzioni di iterazione distinte che generano procedimenti iterativi convergenti, ma con diverso ordine di convergenza, alla radice più piccola mediante il metodo delle approssimazioni successive.

8.3 Per ognuno dei metodi generati al passo precedente, specificare la scelta dell'approssimazione iniziale e il tipo di convergenza.