

Analisi Numerica

(A.A. 2014-2015)

Appunti delle lezioni: Sistemi non lineari

Docente Vittoria Bruni

Email: vittoria.bruni@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 16

Tel. 06 49766648

Ricevimento: Martedì 9.30-10.30

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

<http://sbai.uniroma1.it/users/bruni-vittoria/>

nella pagina dedicata al corso [Analisi Numerica](#)

Sistemi di equazioni non lineari

Un **sistema di equazioni non lineari**, $F(X) = 0$, può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

con $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$ e $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

La **soluzione** del sistema è il vettore $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ le cui componenti **annullano simultaneamente** le n equazioni del sistema.

Supporremo che le funzioni $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$, siano almeno **continue** in D

Metodo del punto unito in \mathbb{R}^n

Si scrive il sistema

$$F(X) = 0$$

nella forma equivalente

$$X = \Phi(X)$$

con $\Phi = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X)]^T$

Se $\Xi \in \mathbb{R}^n$ è **radice** di F allora è **punto unito** di Φ :

$$F(\Xi) = 0 \Leftrightarrow \Xi = \Phi(\Xi)$$

Metodo del punto unito in \mathbb{R}^n

$$X = \Phi(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

e quindi

$$\Xi = \Phi(\Xi) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \xi_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{cases}$$

Metodo del punto unito

Il **punto unito** $\Xi = \Phi(\Xi)$, $\bar{X} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \text{ dato} \\ X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)}) \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T \text{ dato} \\ x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Le funzione φ_i sono chiamate **funzioni di iterazione**.

Convergenza

Per poter definire la **convergenza** di un metodo iterativo dobbiamo prima di tutto definire l'**errore di troncamento**

Errore di troncamento: $E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

\swarrow \searrow

soluzione esatta **soluzione approssimata**

Per "*misurare*" la lunghezza di un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ si ricorre alla **norma di vettore**:

$$\|V\| = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Se il metodo iterativo è **convergente**, in assenza di errori di arrotondamento si ottiene la **soluzione esatta** dopo un **numero infinito** di passi.

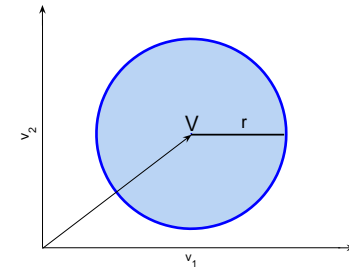
Nota. In pratica ci si arresta quando $\|E^{(k)}\| \leq \epsilon$ (**criterio di arresto**)

Norma di vettore

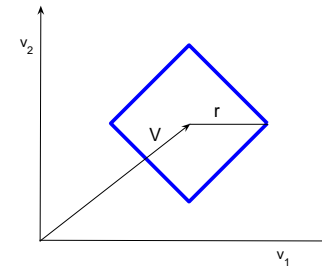
La **norma** di un vettore $V = [v_1, \dots, v_n]^T$ viene utilizzata per "*misurare*" la sua **lunghezza**.

Intorno: $\|V - W\| \leq r$

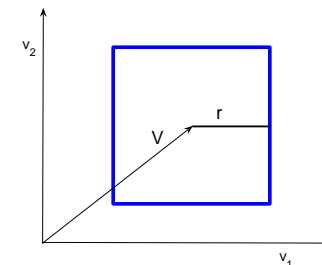
- **Norma due o euclidea:** $\|V\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$



- **Norma uno:** $\|V\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$



- **Norma infinito:** $\|V\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$



Nota. Tutte le norme sono **equivalenti**: $m\|V\|_p \leq \|V\|_q \leq M\|V\|_p$

Proprietà della norma di vettore

- $\|V\| \geq 0$, $\|V\| = 0 \iff V = 0$
- $\|\alpha V\| = |\alpha| \cdot \|V\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall V \in \mathbf{R}^n$
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall V, W \in \mathbf{R}^n$ (*disuguaglianza triangolare*)

Distanza: in uno **spazio vettoriale normato** S è possibile introdurre la **distanza** tra due punti V e W in S

$$d(V, W) := \|V - W\|$$

Proprietà della distanza:

- $d(V, W) = 0 \iff V = W$
- $d(V, W) = d(W, V) \quad \forall V, W \in S$
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W) \quad \forall V, W, Z \in S$

Norme di matrici

La **norma** di una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ soddisfa le seguenti

Proprietà

- $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (*disuguaglianza triangolare*)
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$

Definizione. Una matrice si dice **convergente** se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$

Norme indotte dalla norma di vettore

Ogni **norma di vettore** può essere utilizzata per definire una **norma di matrice** che permette di "*misurare*" come la matrice agisce sui vettori:

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad X \in \mathbf{R}^n$$

Le norme indotte soddisfano tutte le **proprietà delle norme** e, inoltre, soddisfano la **relazione di compatibilità** :

$$\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

Infatti, se $X \neq 0$, si ha

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{\|X\| \neq 0} \left\| \frac{AX}{\|X\|} \right\| = \max_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \implies \|A\| \geq \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

Nota. Per tutte le norme indotte si ha $\|I\| = 1$ (I : matrice identità)

Norme indotte: esempi

- **Norma uno:**
$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{per colonne})$$

- **Norma infinito:**
$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{per righe})$$

- **Norma due o spettrale:**
$$\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^T A)}$$

dove $\rho(M) := \max_i |\lambda_i|$ (λ_i : autovalori di M) è il **raggio spettrale** della matrice $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Se A è **simmetrica** $\implies \rho(A^T A) = \rho^2(A) \implies \|A\|_2 = \rho(A)$

Autovalori

Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine n . Se esiste un numero (reale o complesso) λ e un vettore \mathbf{x} tali che

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

allora λ si dice *autovalore* di \mathbf{A} e \mathbf{x} è il corrispondente *autovettore*.

La relazione precedente può scriversi in forma equivalente come segue

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e, poichè $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, il determinante della matrice del sistema deve essere nullo, cioè

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

E' possibile dimostrare che l'identità precedente è equivalente a

$$\lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(\mathbf{A}) = 0.$$

Il polinomio al primo membro si dice *polinomio caratteristico* e le sue radici sono gli autovalori di A . Inoltre

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A).$$

Teorema. Per una norma verificante la **relazione di compatibilità** si ha $\rho(A) \leq \|A\|$.

Infatti da $\lambda X = AX \implies \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$.

Convergenza: condizione necessaria

Tramite la **norma di vettore** si può "misurare" la **lunghezza** del vettore errore di truncamento, cioè la **distanza** tra la soluzione esatta e quella approssimata.

$$\text{Convergenza: } \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$$

Teorema. Sia S uno **spazio vettoriale normato** e sia $\Phi : S \rightarrow S$. Se la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a un valore $\bar{X} \in S$ e l'applicazione Φ è **continua** in $\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ è **punto unito** di Φ , cioè $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$.

Dim.

$$\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X^{(k-1)}) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k-1)}\right) = \Phi(\bar{X})$$

Convergenza: condizione sufficiente

Definizione. Un'applicazione $\Phi : S \rightarrow S$, dove S è uno **spazio normato** è detta **contrazione**, se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\| < \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in S$$

Teorema. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\Phi : D \rightarrow D$ è una **contrazione**

\Rightarrow • esiste un **unico punto unito** $\bar{X} \in D$ di Φ

- la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a \bar{X} per ogni **approssimazione iniziale** $X^{(0)} \in D$

Contrazione: condizione sufficiente

Matrice Jacobiana di Φ

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema. Se *i)* le **funzioni di iterazione** $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono **continue** e **parzialmente derivabili** in D ;

ii) esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|J(X)\| \leq \lambda$ per $X \in D$

$\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** in D

Esempio

La condizione $\|J(X)\| \leq \lambda$, $X \in D$, è **sicuramente verificata** se

$$\left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_k} \right| \leq M_{ik} \quad i, k = 1, \dots, n \quad X \in D$$

con

$$\|M\| \leq \lambda < 1 \quad \text{dove } M = [M_{ik}]_{i,k=1}^n$$

Esempio: $n = 2$

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |\varphi_x(X)| \leq M_{11} & |\varphi_y(X)| \leq M_{12} \\ |\psi_x(X)| \leq M_{21} & |\psi_y(X)| \leq M_{22} \end{cases}$$

$$M_{11} + M_{12} \leq \lambda < 1 \quad \text{e} \quad M_{21} + M_{22} \leq \lambda < 1$$

$$\|M\| \leq \lambda < 1 \Leftrightarrow \text{oppure } M_{11} + M_{21} \leq \lambda < 1 \quad \text{e} \quad M_{12} + M_{22} \leq \lambda < 1$$

$$\text{oppure } M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{21}^2 + M_{22}^2 \leq \lambda < 1$$

Esercizio

Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = y\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$$

con $(x, y) \in [a, b] \times [c, d] = [0, \sqrt{3}] \times [0, 2]$

- individuare le radici del sistema nei rettangoli

$$Q_1 = \left(a, a + \frac{b-a}{2}\right) \times \left(a, c + \frac{d-c}{2}\right), \quad Q_2 = \left(a, a + \frac{b-a}{2}\right) \times \left(c + \frac{d-c}{2}, d\right)$$

$$Q_3 = \left(a + \frac{b-a}{2}, b\right) \times \left(c, c + \frac{d-c}{2}\right), \quad Q_4 = \left(a + \frac{b-a}{2}, b\right) \times \left(c + \frac{d-c}{2}, d\right)$$

- stabilire se le seguenti funzioni di iterazione

$$\begin{cases} \phi(x, y) = \sqrt{3 - y^2} \\ \psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

sono adatte ad approssimare le radici individuate al punto precedente con il metodo del punto unito. Per ogni radice, specificare la scelta dell'approssimazione iniziale.

Metodo di Newton per sistemi

Sistema non lineare:

$$F(X) = 0 \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Il **metodo di Newton** per la soluzione di sistemi non lineari si basa sulla **linearizzazione** della $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]^T$

Se le funzioni $f_i(X)$ hanno **derivate parziali limitate**, allora si può sviluppare in **serie di Taylor** la funzione vettoriale $F(X)$ scegliendo come punto iniziale $X^{(k)}$

$$F(X) = F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) + \dots$$

dove $[J_F(X)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ è lo **giacobiano** della $F(X)$

$$\Rightarrow F(X^{(k+1)}) \approx F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)}) (X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^{(0)} & \text{dato} \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - [J_F(X^{(k)})]^{-1} F(X^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

Convergenza del metodo di Newton

Il **metodo di Newton** è un **metodo iterativo** la cui **funzione di iterazione** è $\Phi(X) = X - [J_F(X)]^{-1} F(X)$

Teorema. Sia \bar{X} una soluzione del sistema non lineare
$$F(X) = 0$$

con $F \in C^2(I)$ ($I \in \mathbf{R}^n$ intorno di \bar{X}).

Sia $\det J_F(X) \neq 0$ per $X \in I$.

\Rightarrow **i)** $\exists A \subseteq I$ tale che, $\forall X^{(0)} \in A$, la successione $\{X^{(k+1)}\} = \{\Phi(X^{(k)})\}$ **converge** a \bar{X} ;

ii) la convergenza è **quadratica**: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E^{(k+1)}\|}{\|E^{(k)}\|^2} > 0$.

Osservazioni sul metodo di Newton per sistemi

- La **convergenza** del metodo è legata all'**accuratezza** dell'**approssimazione iniziale**.
- Ad ogni passo bisogna verificare che $\det J_F(X^{(k)}) \neq 0$. Nella pratica, si può avere **instabilità** numerica se $\det J_F(X^{(k)})$ è "**piccolo**" → conviene utilizzare una **precisione elevata**.
- Poiché il **costo computazionale** del calcolo di $\det J_F(X^{(k)})$ può essere **elevato**, si preferisce risolvere ad ogni passo il sistema lineare
$$J_F(X^{(k)})Y = -F(X^{(k)}) \Rightarrow X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y$$
- **Criterio di arresto**: il procedimento iterativo viene arrestato quando $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq \epsilon$.
- A volte si preferisce ricalcolare $J_F(X^{(k)})$ non ad ogni iterazione ma **dopo 3-4 iterazioni** (metodi di tipo quasi-Newton).

Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\text{Per } n = 2 \text{ si ha: } \begin{cases} f(X) = f(x, y) = 0 \\ g(X) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Formula di Taylor di punto iniziale $X^{(k)} = [x_k, y_k]^T$:



$$\begin{cases} f(X) = f(X^{(k)}) + f_x(X^{(k)})(x - x_k) + f_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_1 = 0 \\ g(X) = g(X^{(k)}) + g_x(X^{(k)})(x - x_k) + g_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_2 = 0 \end{cases}$$

dove $R_1 = R_1(X, X^{(k)})$, $R_2 = R_2(X, X^{(k)})$ rappresentano il **resto**.

La **soluzione approssimata** del sistema non lineare è la soluzione del **sistema lineare** che si ottiene trascurando il resto nello sviluppo precedente.

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ J_F^{(k)}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -F(X^{(k)})$$

dove $J_F^{(k)} := J_F(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} f_x(X^{(k)}) & f_y(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)}) & g_y(X^{(k)}) \end{bmatrix}$

Il **sistema lineare** ammette soluzione se

$$|J_F^{(k)}| = \det J_F^{(k)} \neq 0$$

La soluzione è

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{|J_F^{(k)}|} [f(X^{(k)})g_y(X^{(k)}) - g(X^{(k)})f_y(X^{(k)})] \\ y_{k+1} = y_k - \frac{1}{|J_F^{(k)}|} [g(X^{(k)})f_x(X^{(k)}) - f(X^{(k)})g_x(X^{(k)})] \end{cases}$$

Esempio

Determinare i punti di intersezione tra il cerchio $x^2 + y^2 = 3$ e l'iperbole $xy = 1$ con 5 decimali esatti.

Soluzione

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$ e $g(x, y) = xy - 1$.

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Separazione grafica: Le due funzioni hanno 4 punti di intersezione: 2 nel primo quadrante e 2 nel terzo.

Ne segue che, detti $\xi_1 = (x_1, y_1)$ e $\xi_2 = (x_2, y_2)$ i punti di intersezione nel primo quadrante, i rimanenti due sono:

$$\xi_3 = (-x_1, -y_1) \quad \text{e} \quad \xi_4 = (-x_2, -y_2).$$

Inoltre, se il punto di coordinate (x_1, y_1) è uno zero sia di f che di g , lo è anche il punto di coordinate (y_1, x_1) . Ne segue che

$$\xi_2 = (x_2, y_2) = (y_1, x_1).$$

Il punto $\xi_1 = (x_1, y_1)$ è contenuto in $I_1 = [0, 1] \times [1, \sqrt{3}]$.

Si verifica facilmente che $F(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]^T \in C^2(I_1)$.

Inoltre

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x, y)| = 2x^2 - 2y^2 = 0 \iff x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow |J_F(x, y)| \neq 0 \text{ in } I_1.$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

Scegliendo il punto $X^{(0)} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ come approssimazione iniziale della soluzione si ha

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [f(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0)] \\ y_1 = y_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [g(x_0, y_0) f_x(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - 3\right) \frac{1}{2} - \left(\frac{13}{22} - 1\right) 2 \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\ y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{4} - 1\right) + \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 0.00694 = 0.61806 \\ y_2 = y_1 - 0.00694 = 1.61806 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 0.00003 = 0.61803 \\ y_3 = y_2 - 0.00003 = 1.61803 \end{cases}$$

Esercizio

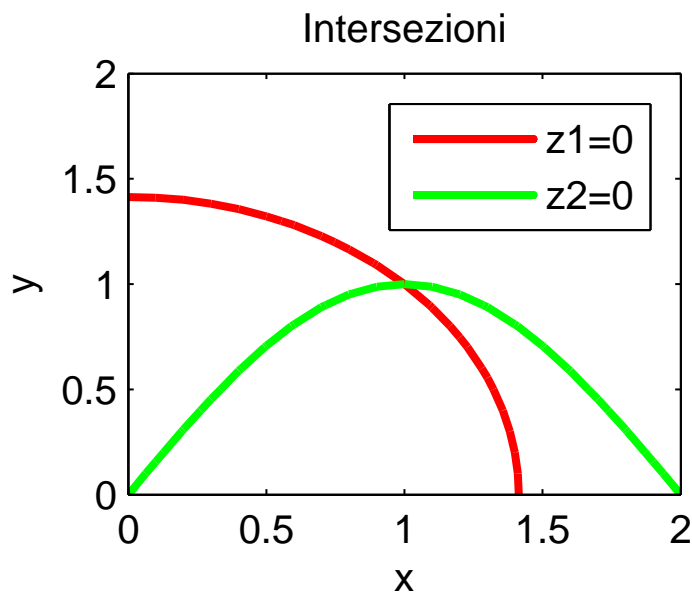
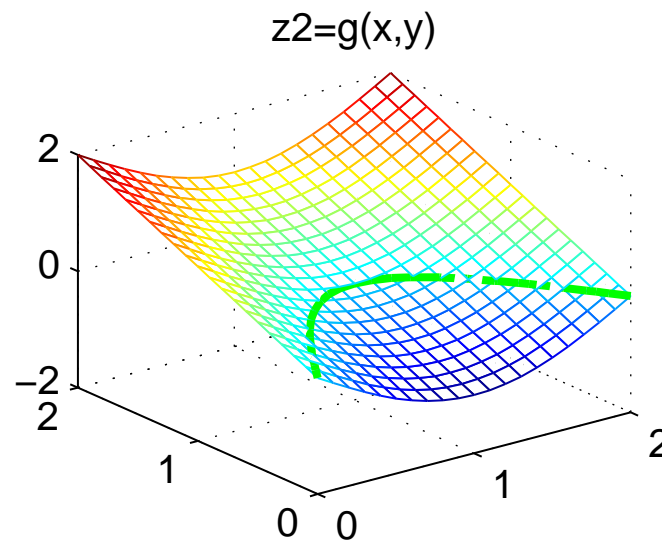
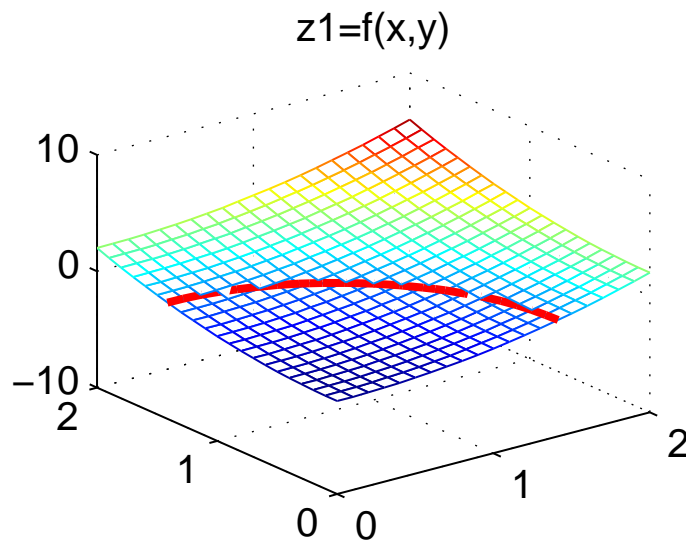
Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, \end{cases}$$

stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

Soluzione

E' necessario determinare un opportuno intervallo I in cui la soluzione $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ del sistema sia unica. Disegnando il grafico delle due funzioni, limitandoci al primo quadrante, possiamo concludere che $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$ è un buon intervallo di separazione



Inoltre, le funzioni $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x,y) = y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sono

$C^2(I)$, mentre la matrice Jacobiana

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 1 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$|J_F(x, y)| = 2x + \pi y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$$

in un intorno opportuno del punto $(1, 1)$ contenuto in I ; infatti,

$$|J_F(1, 1)| = 2 + 0 > 0.$$

Possiamo concludere che sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**.

Esercizio

Mostrare che risolvere il sistema precedente è equivalente a risolvere la seguente equazione non lineare

$$x^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2.$$

Risolvere l'equazione precedente usando il metodo di Newton-Raphson e confrontare il risultato con la soluzione del sistema ottenuta risolvendo il sistema con il metodo di Newton

Esercizio

- Determinare i valori del parametro reale α per i quali le funzioni $f(x, y) = e^x + \alpha - y$ e $g(x, y) = x - y^2 + 1$ hanno un unico punto di intersezione $P = (\xi, \eta)$ nel semipiano $x > 0$ tale che $f(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) = 0$;
- posto $\alpha = -3$, stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare P nel rettangolo $R = [0, 1.5] \times [-1.8, 0]$.

Soluzione: E' necessario risolvere il seguente sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} e^x + \alpha - y = 0 \\ x - y^2 + 1 = 0, \end{cases}$$

Verificare per via grafica che il sistema non lineare ha un'unica soluzione nel semipiano positivo per $-2 < \alpha < 0$.

Esercizio

Trovare le soluzioni del seguente sistema non lineare la cui ascissa appartiene all'intervallo $(0, 1.5)$.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x) - y = 1 \\ \cos(x) - 3\sin(y) = 0, \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

L. Gori, *Calcolo Numerico*: Cap. 3, §§ 3.9, 3.10

L. Gori, M.L. Lo Cascio, *Esercizi di Calcolo Numerico*: Es. 1.28, 1.29, 7.53, 7.56