IV APP LUG 2018

Sia $\mathfrak{R}$ un disco circolare rigido omogeneo pesante, di centro C massa $\mathfrak{M}$ e raggio r, che presenta una cavità circolare di raggio $r/2$ e tangente internamente al bordo del disco stesso. Siano A il centro della cavità e ξ l'asse solidale, dato da $(C, vers\ \overrightarrow{AC})$.

Nello spazio terrestre supposto inerziale il corpo $\mathfrak{R}$ è vincolato a muoversi su un piano verticale fisso rispetto a terra. Sia (x, y) tale piano, con y verticale e orientato verso l'alto.

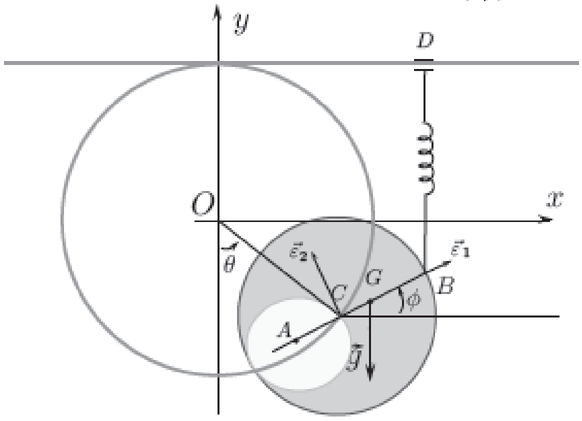
Il centro C del disco è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa nel piano (x, y), avente centro nell'origine O del sistema di riferimento e raggio $R =: \beta r$ con $\beta > 1$.

Sia θ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{OC}$ forma rispetto al versore $-\vec{e}_2$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$, sia B il punto fisso sul bordo del disco e di coordinate (relative) $(r, 0, 0)$, e sia ϕ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{CB}$ forma rispetto al versore $\vec{e}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema, oltre ai pesi e alla sollecitazione vincolare, agisce una forza elastica, di costante elastica k, applicata al punto B e avente centro in un punto D del sistema di riferimento che scorre sull'asse $y = R$ in modo da essere costantemente sulla verticale per B (e cioè tale che $x_B \equiv x_D$).

Si assumano come coordinate lagrangiane le due anomalie θ e ϕ, si introduca la costante positiva ρ tale che $\mathfrak{M}\, g =: \rho\, k\, R$, e si risolvano i seguenti punti usando le costanti r, ρ, β.



0) Dimostrare che sussistono le relazioni $\xi_G = r/6$, e $J_{G,\vec{e}_3} = \frac{37}{72}\, \mathfrak{M}\, r^2$.

1) Esprimere le energie cinetica e potenziale del sistema e ricavarne le equazioni di Lagrange.

2) Determinare, con i particolari valori $\rho = 8$ e $\beta = 2$, le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità, mostrando che l'unica posizione stabile è $\mathcal{C}_1 = (\theta_1 = 0,\ \phi_1 = \pi/2)$.

3) Scrivere le equazioni cardinali e (*facoltativo*) verificare le equazioni trovate nel Punto 1).

4) Ricavare esplicitamente (in funzione delle k, r, ρ, β) le espressioni globali $(\vec{F}^v, \vec{M}^v_G)$ della sollecitazione vincolare con la quale la guida agisce sul disco in un istante in cui si hanno $\left(\theta_0 = 0,\ \phi_0 = \pi/2,\ \dot{\theta}_0 = \sqrt{g/R},\ \dot{\phi}_0 = \sqrt{6\, g/R}\right)$, e specificare il valore assunto dalla costante c tale che $\vec{M}^v_G = c\, \mathfrak{M}\, g\, r\, \vec{e}_3$.

5) Ancora con i valori $\rho = 8$ e $\beta = 2$, scrivere le equazioni di moto linearizzate nell'intorno della posizione $\mathcal{C}_1$, e l'equazione delle frequenze proprie ν_1, ν_2. Infine esprimere (formalmente) la soluzione di tali equazioni in funzione di arbitrari dati iniziali: $\left(\theta_0,\ \phi_0,\ \dot{\theta}_0,\ \dot{\phi}_0\right)$.

□

Risoluzione IV APP LUG 2018

Punto 0) L'ascissa ξ_G del baricentro e il momento d'inerzia $J_{G,\vec{e}_3}$ del corpo $\mathfrak{R}$ sono conseguenze delle seguenti

$$0 = \mu\pi \frac{r^2}{4} \left(-\frac{r}{2}\right) + \mu\pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) \xi_G\,, \qquad \text{con} \quad \mu\pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \mathfrak{M}$$

$$\mu\pi\, r^2\, \frac{r^2}{2} - \mu\pi\, \frac{r^2}{4} \left(\frac{r^2/4}{2} + \frac{r^2}{4}\right) = \mathfrak{M}\, \xi_G^2 + J_{G,\vec{e}_3}\,, \qquad \mathfrak{M}\, \xi_G = \mu\pi\, \frac{r^2}{4}\, \frac{r}{2} = \frac{4}{3}\, \mathfrak{M}\, \frac{r}{8}\,.$$

Pertanto $\quad \mathfrak{M}\, \xi_G^2 + J_{G,\vec{e}_3} = \dfrac{13}{8}\ \mu\pi\, r^2\ \dfrac{r^2}{4}$ e quindi, dato che $\dfrac{1}{36} + \dfrac{37}{72} = \dfrac{39}{72} = \dfrac{13}{24}$,

$$\xi_G = \frac{r}{6} \qquad \text{e} \qquad J_{G,\vec{e}_3} = \mathfrak{M}\, r^2 \left(\frac{13}{24} - \frac{1}{36}\right) = \frac{37}{72}\, \mathfrak{M}\, r^2 \qquad \text{insieme con} \qquad \mathfrak{M}\, \xi_G^2 + J_{G,\vec{e}_3} = \frac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2 \ .$$

<u>*Punto 1)*</u> Sussistono le relazioni (nelle quali non verrà scritta la terza componente dei vettori se questi sono sul piano (x, y))

$$\begin{aligned}
&\left(\overrightarrow{OC}\right)_e = R \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} , \qquad \left(\vec{\varepsilon}_1\right)_e = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{CB}\right)_e = r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} , \\
&\left(\overrightarrow{OG}\right)_e = R \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + \xi_G \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} , \qquad \left(\overrightarrow{OB}\right)_e = R \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} , \\
&\left(\vec{v}_C\right)_e = R\dot\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} , \qquad \left(\vec{v}_G\right)_e = R\dot\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \xi_G\, \dot\phi \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} , \\
&\left(\vec{a}_C\right)_e = R \begin{pmatrix} \ddot\theta\, \cos\theta - \dot\theta^2\, \sin\theta \\ \ddot\theta\, \sin\theta + \dot\theta^2\, \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{BD}\right)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ R + R\cos\theta - r\, \sin\phi \end{pmatrix} , \\
&\left(\vec{a}_G\right)_e = R \begin{pmatrix} \ddot\theta\, \cos\theta - \dot\theta^2\, \sin\theta \\ \ddot\theta\, \sin\theta + \dot\theta^2\, \cos\theta \end{pmatrix} + \xi_G \begin{pmatrix} -\ddot\phi\, \sin\phi - \dot\phi^2\, \cos\phi \\ \ddot\phi\, \cos\phi - \dot\phi^2\, \sin\phi \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Di conseguenza si hanno le

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathfrak{M}\, g\, y_G + \frac{1}{2}\, k\, \left(R + R\, \cos\theta - r\, \sin\phi\right)^2 \\
&= \mathfrak{M}\, g \left(-R\cos\theta + \xi_G \sin\phi\right) + \frac{1}{2}\, k\, \Big(R^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi \\
&\quad \Big(+2R^2\cos\theta - 2Rr\sin\phi - 2Rr\cos\theta\sin\phi\Big) + cost. \\
&= \frac{1}{2}\, k\, R^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\, k\, r^2\sin^2\phi + \left(-\mathfrak{M}\, g + kR\right) R\, \cos\theta \\
&\quad + \left(\mathfrak{M}\, g/6 - kR\right) r\, \sin\phi - kRr\cos\theta\sin\phi + cost.\ , \\
\mathcal{T} &= \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}\, R^2\, \dot\theta^2 + \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}\, \xi_G^2\, \dot\phi^2 + \mathfrak{M}\, R\xi_G\, \dot\phi\dot\theta\, \sin(\theta - \phi) + \frac{1}{2}\, J_{G,\vec{e}_3}\, \dot\phi^2 \\
&= \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}\, R^2\, \dot\theta^2 + \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}\, r^2\, \frac{13}{24}\, \dot\phi^2 + \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\phi\dot\theta\, \sin(\theta - \phi)\ ,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} = -k\, R^2\cos\theta\sin\theta - \left(-\mathfrak{M}\, g + kR\right) R\, \sin\theta + kRr\sin\theta\sin\phi \\
\qquad = R\, \Big(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + \left(\mathfrak{M}\, g - kR\right)\Big) \sin\theta \\
\qquad = \beta\, k\, r^2\, \left(\sin\phi - \beta\, \cos\theta + \beta(\rho - 1)\right)\, \sin\theta \\
\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\phi} = k\, r^2\cos\phi\sin\phi + \left(\mathfrak{M}\, g/6 - kR\right) r\, \cos\phi - kRr\cos\theta\cos\phi \\
\qquad = r\, \left(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + (\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, g - kR)\right) \cos\phi \\
\qquad = k\, r^2\, \left(\sin\phi - \beta\, \cos\theta + \beta(\dfrac{\rho}{6} - 1)\right)\, \cos\phi
\end{cases} \tag{5.0.12}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\theta} = \mathfrak{M}\, R^2\, \dot\theta + \dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\phi\, \sin(\theta - \phi) \\
\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\phi} = \dfrac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2\, \dot\phi + \dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\theta\, \sin(\theta - \phi)
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\theta} = +\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\phi\, \dot\theta\, \cos(\theta - \phi) \\
\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\phi} = -\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\phi\, \dot\theta\, \cos(\theta - \phi)\ .
\end{cases} \tag{5.0.13}$$

Dalle (5.0.12) e (5.0.13) seguono le equazioni di Lagrange:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_\theta & \left\{\begin{array}{c} \mathfrak{M}\, R^2\, \ddot{\theta} + \dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \ddot{\phi}\, \sin(\theta-\phi) - \dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot{\phi}^2\, \cos(\theta-\phi) \;=\; \\ -R\, \Big(kr \sin\phi - k\, R\cos\theta + (\mathfrak{M}\, g - kR)\Big)\, \sin\theta \\ +\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \ddot{\theta}\, \sin(\theta-\phi) + \dfrac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2\, \ddot{\phi} + \dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot{\theta}^2\, \cos(\theta-\phi) \;=\; \\ -r\, \Big(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + (\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, g - kR)\Big)\, \cos\phi \end{array}\right. \\ \mathcal{L}_\phi & \end{array} \tag{5.0.14}$$

<u>*Punto 2)*</u> Dalle (5.0.12) si ricavano le condizioni di equilibrio:

$$\left\{\begin{array}{l} R\, \Big(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + (\mathfrak{M}\, g - kR)\Big)\, \sin\theta \;=\; 0 \\ r\, \Big(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + (\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, g - kR)\Big)\, \cos\phi \;=\; 0 \end{array}\right.$$

ovvero, essendo $kR = k\beta\, r$, le

$$\begin{aligned} \Big(\sin\phi - \beta\cos\theta + \beta(\rho-1)\Big)\, \sin\theta \;&=\; 0\,, \\ \Big(\sin\phi - \beta\cos\theta + \beta(\frac{\rho}{6}-1)\Big)\, \cos\phi \;&=\; 0\,. \end{aligned} \tag{5.0.15}$$

Pertanto, con i dati $\rho = 8$ e $\beta = 2$ esse diventano:

$$\begin{aligned} \Big(\sin\phi - 2\,\cos\theta + 14\Big)\, \sin\theta \;&=\; 0\,, \\ \Big(\sin\phi - 2\,\cos\theta + \frac{2}{3}\Big)\, \cos\phi \;&=\; 0\,, \end{aligned}$$

e forniscono $\sin\theta = 0$ come condizione necessaria; a questa si aggiunge $\cos\phi\, \big(\sin\phi + 2\,(\mp 1 + \frac{1}{3})\big)$ il cui coefficiente è comunque diverso da zero. Rimangono quindi solo le seguenti quattro posizioni di equilibrio

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 = 0 \\ \phi_1 = \pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 = 0 \\ \phi_2 = -\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 = \pi \\ \phi_3 = \pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_4 = \begin{pmatrix} \theta_4 = \pi \\ \phi_4 = -\pi/2 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, dalle (5.0.12) e (5.0.13) si ricavano anche le

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\theta^2} \;=\; R\, \Big(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + (\mathfrak{M}\, g - kR)\Big)\, \cos\theta + kR^2\sin^2\theta \\ \dfrac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\phi^2} \;=\; -r\, \Big(kr\sin\phi - k\, R\cos\theta + (\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, g - kR)\Big)\, \sin\phi + kr^2\cos^2\phi \\ \dfrac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial\theta\partial\phi} \;=\; kRr\sin\theta\cos\phi \end{array}\right. \tag{5.0.16}$$

oltre che le

$$\frac{\partial^2\mathcal{T}}{\partial\dot{\theta}^2} \;=\; \mathfrak{M}\, R^2\,, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{T}}{\partial\dot{\phi}^2} \;=\; \frac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2\,, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{T}}{\partial\dot{\theta}\partial\dot{\phi}} \;=\; \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \sin(\theta-\phi)\,. \tag{5.0.17}$$

Ne seguono in particolare, con $\boxed{\mathfrak{M}\, g =: \rho k R}$ e con $\boxed{\beta := R/r}$, le

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\, R^2 & \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \sin(\theta-\phi) \\ \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \sin(\theta-\phi) & \frac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{b} &= kr^2 \begin{pmatrix} \beta\, (\sin\phi - \beta\cos\theta + \beta(\rho-1))\, \cos\theta + \beta^2\sin^2\theta & \beta\,\sin\theta\cos\phi \\ \beta\,\sin\theta\cos\phi & -\big(\sin\phi - \beta\cos\theta + \beta(\frac{\rho}{6}-1)\big)\, \sin\phi + \cos^2\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.0.18}$$

o anche

$$\boldsymbol{b} = kr^2 \begin{pmatrix} -4\cos 2\theta + 2\sin\phi\cos\theta + 28\cos\theta & 2\,\sin\theta\cos\phi \\ 2\,\sin\theta\cos\phi & -\cos 2\theta + 2\cos\theta\sin\phi - \frac{2}{3}\,\sin\phi \end{pmatrix}$$

Queste si specializzano nelle

$$\boldsymbol{b}_1 \;=\; kr^2 \begin{pmatrix} \beta(1+\beta(\rho-2)) & 0 \\ 0 & -(1+\beta\,(\frac{\rho}{6}-2)) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_3 \;=\; kr^2 \begin{pmatrix} -\beta(1+\rho\,\beta) & 0 \\ 0 & -(1+\frac{\rho}{6}\,\beta) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 \;=\; kr^2 \begin{pmatrix} \beta(-1+\beta(\rho-2)) & 0 \\ 0 & (-1+\beta\,(\frac{\rho}{6}-2)) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_4 \;=\; kr^2 \begin{pmatrix} -\beta(-1+\rho\,\beta) & 0 \\ 0 & (-1+\frac{\rho}{6}\,\beta) \end{pmatrix},$$

e cioè nelle

$$\boldsymbol{b}_1 = kr^2 \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = kr^2 \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = kr^2 \begin{pmatrix} -34 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = kr^2 \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

che permettono di concludere che la $\mathcal{C}_1 = (0, \pi/2)$ è l'unica posizione di equilibrio stabile.

<u>*Punto 3)*</u> Le equazioni cardinali sono invece

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\,\vec{a}_G \;=\; \mathfrak{M}\,\vec{g} - k\,\overrightarrow{DB} + \vec{F}^v \\ \dot{\vec{K}}^G \;=\; -\overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GC}\times\vec{F}^v + \vec{M}^v_C \end{cases} \tag{5.0.19}$$

dalle quali ricavare, siccome i vincoli sono tutti senza attrito, che $F^v_z = 0$ e che quindi $\vec{M}^v_C \perp \vec{e}_3$ è nulla. Poi, dovendo essere

$$\begin{cases} \vec{F}^v\times\overrightarrow{OC} \;=\; \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)\times\overrightarrow{OC} \;=\; 0 \\ \vec{F}^v\times\overrightarrow{CG} \;=\; \dot{\vec{K}}^G + \overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB} \end{cases} \tag{5.0.20}$$

dalle stesse (5.0.19) si deducono le condizioni

$$\begin{cases} \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_x y_C \;=\; \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_y x_C \\ \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_x (y_G - y_C) - \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_y (x_G - x_C) \\ \qquad =\; J_{G,\vec{e}_3}\ddot{\phi} - \dfrac{5}{6}\;r\vec{\varepsilon}_1\times k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \end{cases} \tag{5.0.21}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{M}\,R\,\ddot{x}_G\,\cos\theta \;&=\; \Big(\mathfrak{M}\,\ddot{y}_G + \mathfrak{M}\,g - k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\Big)\;R\,\sin\theta \\ \mathfrak{M}\,\frac{r}{6}\;\ddot{x}_G\,\sin\phi \;&-\; \Big(\mathfrak{M}\,\ddot{y}_G + \mathfrak{M}\,g - k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\Big)\;\frac{r}{6}\;\cos\phi \\ &=\; \frac{37}{72}\;\mathfrak{M}\,r^2\ddot{\phi} - \frac{5}{6}\;kr\,(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\;\cos\phi \end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\,R\,(\ddot{x}_G\,\cos\theta + \ddot{y}_G\,\sin\theta) \;&=\; \Big(-\mathfrak{M}\,g + k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\Big)\;R\,\sin\theta \\ \mathfrak{M}\,\frac{r}{6}\;(-\ddot{x}_G\,\sin\phi + \ddot{y}_G\,\cos\phi) &+ \Big(\mathfrak{M}\,g - k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\Big)\;\frac{r}{6}\;\cos\phi\;, \\ &=\; -\,\frac{37}{72}\;\mathfrak{M}\,r^2\ddot{\phi} + \frac{5}{6}\;kr\,(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\;\cos\phi\;, \end{aligned}$$

equazioni, queste, che coincidono (provare per credere) con le (5.0.14). D'altra parte, proiettando la prima equazione cardinale lungo la tangente alla guida: $\left(\vec{T}\right)_e \;=\; \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ si ha:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}\,\beta\,r\;\ddot{\theta}\;\cos^2\theta - \mathfrak{M}\,\beta\,r\;\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - \mathfrak{M}\;\frac{r}{6}\;\ddot{\phi}\,\sin\phi\cos\theta - \mathfrak{M}\;\frac{r}{6}\;\dot{\phi}^2\cos\phi\cos\theta + \\ &+\mathfrak{M}\,\beta\,r\;\ddot{\theta}\;\sin^2\theta + \mathfrak{M}\,\beta\,r\;\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + \mathfrak{M}\;\frac{r}{6}\;\ddot{\phi}\,\cos\phi\sin\theta - \mathfrak{M}\;\frac{r}{6}\;\dot{\phi}^2\sin\phi\sin\theta \\ &\qquad =\; k\,r\,\sin\theta\;\;(\beta\cos\theta - \sin\phi + \beta) - \mathfrak{M}\;g\;\sin\theta\;. \end{aligned}$$

che è la prima Lagrange. A sua volta, e usando la matrice di trasformazione $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, per ottenere le $\mathcal{E}$-componenti dei vettori:

$$\left(\vec{a}_G\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \beta\, r\; \ddot{\theta}\; \cos(\theta-\phi) - \beta\, r\dot{\theta}^2 \sin(\theta-\phi) - \frac{r}{6}\; \dot{\phi}^2 \\ \beta\, r\; \ddot{\theta}\; \sin(\theta-\phi) + \beta\, r\dot{\theta}^2 \cos(\theta-\phi) + \frac{r}{6}\; \dot{\phi}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{GB} = -5\; \overrightarrow{GC}\,,$$

$$\left(\overrightarrow{GC}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -r/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\overrightarrow{GC} \times\ \right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r/6 \\ 0 & -r/6 & 0 \end{pmatrix},$$

l'equazione:

$$\dot{\vec{K}}_G = \overrightarrow{GC} \times \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} - 6k\; \overrightarrow{BD}\right), \qquad \text{con} \qquad \left(\overrightarrow{BD}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} r\; \sin\phi\; (\beta\; \cos\theta - \sin\phi + \beta) \\ r\; \cos\phi\; (\beta\; \cos\theta - \sin\phi + \beta) \end{pmatrix},$$

proiettata lungo $\vec{\varepsilon}_3$ fornisce la seconda equazione di Lagrange.

Punto 4) Dalle (5.0.19) si ricava allora $\vec{F}^v = \mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}$ con la quale è possibile calcolare la $\vec{M}^v_G = \vec{M}^v_C + \overrightarrow{GC} \times \vec{F}^v = \vec{F}^v \times \overrightarrow{CG}$. Ma per $\theta_0 = 0$ e $\phi_0 = \pi/2$ si hanno

$$\left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G\right)_e = \mathfrak{M}\,R \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{pmatrix} + \mathfrak{M}\,\xi_G \begin{pmatrix} -\ddot{\phi} \\ -\dot{\phi}^2 \end{pmatrix},$$

$$\left(-\,\mathfrak{M}\,\vec{g}\right)_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{M}\; g \end{pmatrix}, \qquad \left(k\; \overrightarrow{DB}\right)_e = k\; \begin{pmatrix} 0 \\ -2R + r \end{pmatrix},$$

e quindi se ne conclude che per tali valori si ha

$$\left(\vec{F}^v\right)_e = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\,R\,\ddot{\theta} \\ \mathfrak{M}\,R\,\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathfrak{M}\,\xi_G\,\ddot{\phi} \\ -\mathfrak{M}\,\xi_G\,\dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{M}\; g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2kR + kr \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, i valori delle $\ddot{\theta}_0$ e $\ddot{\phi}_0$ si possono ricavare a partire dalle equazioni di Lagrange: (5.0.14). Infatti, per $\theta_0 = 0$ e $\phi_0 = \pi/2$ quelle diventano:

$$\mathfrak{M}\,R^2\,\ddot{\theta} - \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\ddot{\phi} = 0\,, \qquad -\frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\;\ddot{\theta} + \frac{13}{24}\,\mathfrak{M}\,r^2\;\ddot{\phi} = 0\,,$$

e dunque necessariamente $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\phi}_0 = 0$. Tramite queste si ricava la

$$\begin{aligned} \left(\vec{F}^v\right)_e &= \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\,R\,\ddot{\theta}\ - \mathfrak{M}\,\xi_G\,\ddot{\phi} \\ \mathfrak{M}\,g(1-\frac{1}{\beta}) + \mathfrak{M}\,g - 2k\,R + k\,r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{M}\,g\,(2-\frac{1}{\beta}) - 2kR + kr \end{pmatrix} = \mathfrak{M}\; g\; \begin{pmatrix} 0 \\ (2-\frac{1}{\beta}) - \frac{2}{\rho}\ + \frac{1}{\beta\,\rho} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e questa fornisce $\vec{M}^v_G = \vec{F}^v \times \overrightarrow{CG} = c\;\mathfrak{M}\;g\,r\;\vec{e}_3$ con $c = 0$ dato il parallelismo fra i due vettori.

Punto 5) Le linearizzate delle (5.0.14) nella posizione $(\theta_1 = 0,\ \phi_1 = \pi/2)$ (ancora con $\beta = 2$ e $\rho = 8$) sono $\boldsymbol{a}_1\ddot{r} + \boldsymbol{b}_1 r = 0$ per $r := \left(\theta,\ \phi - \frac{\pi}{2}\right)$ e con $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\,R^2 & \frac{1}{6}\;\mathfrak{M}\,R\,r\,\sin(\theta-\phi) \\ \frac{1}{6}\;\mathfrak{M}\,R\,r\,\sin(\theta-\phi) & \frac{13}{24}\;\mathfrak{M}\,r^2 \end{pmatrix}$ che diviene $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4\mathfrak{M}\,r^2 & -\frac{1}{3}\;\mathfrak{M}\,r^2 \\ -\frac{1}{3}\;\mathfrak{M}\,r^2 & \frac{13}{24}\;\mathfrak{M}\,r^2 \end{pmatrix}$, e con $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 26\;kr^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\;kr^2 \end{pmatrix}$. Dunque esse sono:

$$\begin{cases} 4\mathfrak{M}\;\ddot{\theta} - \dfrac{1}{3}\;\mathfrak{M}\;\ddot{\phi} = -26\,k\;\theta \\ -\dfrac{1}{3}\;\mathfrak{M}\;\ddot{\theta} + \dfrac{13}{24}\;\mathfrak{M}\;\ddot{\phi} = -\dfrac{1}{3}\;k\;(\phi - \dfrac{\pi}{2})\,. \end{cases} \tag{5.0.22}$$

Per trovare i corrispondenti modi normali occorre poi risolvere l'equazione

$$\mathrm{Det}\ \left(\boldsymbol{b}_1 - \lambda\ \boldsymbol{a}_1\right) \ = \ \mathrm{Det}\ \begin{pmatrix} 26\,k - 4\,\lambda\mathfrak{M} & \frac{1}{3}\ \lambda\,\mathfrak{M} \\ \frac{1}{3}\ \lambda\,\mathfrak{M} & \frac{1}{3}\ k - \frac{13}{24}\ \lambda\,\mathfrak{M} \end{pmatrix} \ = \ 0\ ,$$

che diviene

$$\left(\frac{13}{6} - \frac{1}{9}\right)\ \mathfrak{M}^{\,2}\,\lambda^2 - \mathfrak{M}\,k\,\left(\frac{4}{3} + \frac{13\cdot 13}{12}\right)\ \lambda + \frac{26}{3}\ k^2 \ = \ 0\ ,$$

o anche $74\ \frac{\mathfrak{M}^{\,2}}{k^2}\ \lambda^2\ - 555\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\ \lambda + 312 \ = \ 0$, da cui le $\nu_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$.

Autovettori sono allora le soluzioni delle

$$\begin{aligned} (26\,k - 4\,\lambda_1\ \mathfrak{M}\,)\ \alpha_1 + \frac{1}{3}\ \lambda_1\,\mathfrak{M}\ \beta_1 \ &= \ 0\ , \\ (26\,k - 4\,\lambda_2\ \mathfrak{M}\,)\ \alpha_2 + \frac{1}{3}\ \lambda_2\,\mathfrak{M}\ \beta_2 \ &= \ 0\ , \end{aligned}$$

da cui segue la corrispondente matrice di trasformazione $\boldsymbol{p}$. Con questa, e con le $\nu_{1,2} := \sqrt{\lambda_{1,2}}$, si calcolano le

$$\begin{pmatrix} \theta^{lin}(t) \\ \phi^{lin}(t) - \pi/2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \cos\nu_1 t & 0 \\ 0 & \cos\nu_2 t \end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{-1}\ \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 - \pi/2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1}\ \sin\nu_1 t & 0 \\ 0 & \frac{1}{\nu_2}\ \sin\nu_2 t \end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{-1}\ \begin{pmatrix} \dot\theta_0 \\ \dot\phi_0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5.0.3