Compito A

Soluzione della prova scritta di ANALISI MATEMATICA di GENNAIO

1. Trovare l'integrale generale di

$$y''' + y = \sin x.$$

***Soluzione*:** Risolviamo prima l'omogenea associata, cioè:

$$y''' + y = 0$$

Per far ciò, scriviamo e risolviamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
La soluzione dell'omogenea associata sarà dunque:

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Sappiamo che l'integrale generale sarà

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x),$$

dove la particolare la cerchiamo nella forma

$$y_p(x) = A\sin x + B\cos x.$$

Per fare in modo che sia soluzione, calcoliamone le derivate e imponiamo che soddisfino l'equazione di partenza

$$y_p'(x) = A\cos x - B\sin x$$

$$y_p''(x) = -A\sin x - B\cos x$$

$$y_p'''(x) = -A\cos x + B\sin x$$

da cui, sostituendo nell'equazione di partenza, ricaviamo:

$$-A\cos x + B\sin x + A\sin x + B\cos x = \sin x,$$

cioè

$$(-A+B)\cos x + (A+B)\sin x = \sin x,$$

dunque, dovrà essere:

$$\begin{cases} -A+B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B=A \\ A+A=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza, l'integrale generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

2. Trovare le radici complesse di

$$z^3 + \bar{z}^4|z| = 0.$$

***Soluzione*:** Consideriamo il numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$. Per essere soluzione della nostra equazione, sostituito in essa, deve verificare l'uguaglianza; quindi, otteniamo

$$\rho^3 e^{3i\theta} = -\rho\rho^4 e^{-4i\theta}$$

che, ricordandoci l'identità $-1 = e^{i\pi}$, possiamo scrivere:

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \rho^5 e^{-4i\theta} e^{i\pi}.$$

In particolare:
- se $\rho = 0$, allora si ottiene $z = 0$;
- se $\rho \neq 0$, allora si ha $\rho^2 e^{i(\pi - 7\theta)} = 1$.

Da qui ricaviamo che $\rho = 1$ e $\pi - 7\theta = 2k\pi$ e quindi $7\theta = \pi + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}$, con $k = 0, ..., 6$.
Dunque, la soluzione che otteniamo in tal caso è

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}\right), \text{ con } k = 0, ..., 6.$$

3. Determinare al variare dei parametri α e β il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{1-\cos\frac{1}{n}}-\alpha\right)n^{\beta}.$$

***Soluzione*:** Il termine generale della serie è

$$a_n=\left(\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{1-\cos\frac{1}{n}}-\alpha\right)n^{\beta}=$$

che, sviluppando in serie di Taylor, si può scrivere

$$=\left(\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+o(\frac{1}{n^4})}{\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{24n^4}+o(\frac{1}{n^4})}-\alpha\right)n^{\beta}=$$

da cui, semplificando

$$=\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}{1-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})}-\alpha\right)n^{\beta}=$$

e prendendo $\alpha=2$, si ottiene:

$$=\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})-2+\frac{1}{6n^2}}{1-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})}\right)n^{\beta}.$$

Questa serie si comporta quindi come

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2-\beta}},$$

che è la serie armonica generalizzata, che converge se e solo se $2-\beta>1$ e cioè se e solo se $\beta<1$.

4. Calcolare l'area della regione piana contenuta nella curva

$$(x^2+y^2)^3=36x^2y^2$$

e nel primo quadrante.

***Soluzione*:** Passando alla coordinate polari

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^3 = 36\rho^2\cos^2\theta\rho^2\sin^2\theta.$$

Grazie alla formula fondamentale della goniometria

$$\rho^6 = 9\rho^4 4\cos^2\theta\sin^2\theta$$

e poi dividendo per ρ^4 e applicando le formule di duplicazione, si ha:

$$\rho^2 = 9[4\cos^2\theta\sin^2\theta] = 9(2\sin\theta\cos\theta)^2 = 9(\sin 2\theta)^2 = (3\sin 2\theta)^2,$$

da cui

$$\rho = 3\sin 2\theta.$$

Poiché dobbiamo limitarci al primo quadrante, otteniamo il seguente intervallo di variazione per θ:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Dunque, usando le formule di riduzione, otteniamo che

$$A(S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\sin 2\theta}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{3\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta =$$

calcolando l'integrale definito all'interno e applicando le formule di bisezione

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[9\sin^2 2\theta]\mathrm{d}\theta = \frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{9}{4}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{8}$$

Compito B

Soluzioni prova scritta di ANALISI MATEMATICA di GENNAIO

1. Trovare l'integrale generale di

$$y''' + 8y = \cos x.$$

***Soluzione*:** Risolviamo prima l'omogenea associata, cioè:

$$y''' + 8y = 0$$

Per far ciò, scriviamo e risolviamo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 + 8 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{3}$ e $\lambda_3 = 1 + i\sqrt{3}$.
La soluzione dell'omogenea associata sarà dunque

$$y_o(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \sin(\sqrt{3}x) + c_3 e^x \cos(\sqrt{3}x).$$

Sappiamo che l'integrale generale sarà

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x),$$

dove la particolare la cerchiamo nella forma

$$y_p(x) = A \sin x + B \cos x.$$

Per fare in modo che sia soluzione, calcoliamone le derivate e imponiamo che soddisfino l'equazione di partenza

$$y_p'(x) = A \cos x - B \sin x$$
$$y_p''(x) = -A \sin x - B \cos x$$
$$y_p'''(x) = -A \cos x + B \sin x$$

da cui, sostituendo nell'equazione di partenza, ricaviamo:

$$-A \cos x + B \sin x + 8A \sin x + 8B \cos x = \cos x,$$

cioè

$$(-A+8B)\cos x + (8A+B)\sin x = \cos x,$$

dunque, dovrà essere:

$$\begin{cases} -A+8B=1 \\ 8A+B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=8B-1 \\ 64B-8+B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=\frac{9}{65} \\ A=\frac{7}{65} \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale è:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \sin(\sqrt{3}x) + c_3 e^x \cos(\sqrt{3}x) + \frac{7}{65}\sin x + \frac{9}{65}\cos x$$

2. Trovare le radici complesse di

$$\bar{z}^3 + iz^5 = 0.$$

***Soluzione*:** Consideriamo il numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$. Per essere soluzione della nostra equazione, sostituito in essa, deve verificare l'uguaglianza; quindi, otteniamo

$$\rho^3 e^{-3i\theta} = -i\rho^5 e^{5i\theta}$$

che, ricordandoci l'identità $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, possiamo scrivere:

$$\rho^3 e^{-3i\theta} = \rho^5 e^{5i\theta} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

In particolare:
- se $\rho = 0$, allora si ottiene $z = 0$;
- se $\rho \neq 0$, allora si ha $\rho^2 e^{i(-\frac{\pi}{2}+8\theta)} = 1$.
Da qui ricaviamo che $\rho = 1$ e $-\frac{\pi}{2} + 8\theta = 2k\pi$ e quindi $8\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, con $k = 0, ..., 7$. Dunque, la soluzione che otteniamo in tal caso è

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}\right), \text{ con } k = 0, ..., 7.$$

3. Determinare al variare dei parametri α e β il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\tan\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1} - \alpha\right)n^\beta.$$

***Soluzione*:** Il termine generale della serie è

$$a_n = \left(\frac{\tan \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1} - \alpha \right) n^\beta =$$

che, sviluppando in serie di Taylor, si può scrivere

$$= \left(\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})}{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o(\frac{1}{n^2})} - \alpha \right) n^\beta =$$

da cui, semplificando

$$= \left(\frac{-2 - \frac{2}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{1 - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})} - \alpha \right) n^\beta =$$

e prendendo $\alpha = -2$, si ottiene:

$$= \left(\frac{-2 - \frac{2}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + 2 - \frac{1}{6n} + o(\frac{1}{n})}{1 - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})} \right) n^\beta =$$

Questa serie si comporta quindi come

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1-\beta}}$$

che è la serie armonica generalizzata, che converge se e solo se $1 - \beta > 1$ e cioè se e solo se $\beta < 0$.

4. Calcolare l'area della regione piana contenuta nella curva

$$(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$$

e nel primo quadrante.

***Soluzione*:** Passando alla coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

si ha:

$$(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)^3 = 16\rho^2 \cos^2 \theta \rho^2 \sin^2 \theta.$$

Grazie alla formula fondamentale della goniometria

$$\rho^6 = 4\rho^4 4\cos^2\theta \sin^2\theta$$

e poi dividendo per ρ^4 e applicando le formule di duplicazione, si ha:

$$\rho^2 = 4[4\cos^2\theta\sin^2\theta] = 4(2\sin\theta\cos\theta)^2 = 4(\sin 2\theta)^2 = (2\sin 2\theta)^2$$

da cui

$$\rho = 2\sin 2\theta.$$

Poiché dobbiamo limitarci al primo quadrante, otteniamo il seguente intervallo di variazione per θ:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dunque, usando le formule di riduzione, otteniamo che

$$A(S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin 2\theta} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{2\sin 2\theta} \mathrm{d}\theta =$$

calcolando l'integrale definito all'interno e applicando le formule di bisezione

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\sin^2 2\theta]\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$