

## IV APP LUG 2018

Sia  $\mathfrak{R}$  un disco circolare rigido omogeneo pesante, di centro  $C$  massa  $\mathfrak{M}$  e raggio  $r$ , che presenta una cavità circolare di raggio  $r/2$  e tangente internamente al bordo del disco stesso. Siano  $A$  il centro della cavità e  $\xi$  l'asse solidale, dato da  $(C, \text{vers } \overrightarrow{AC})$ .

Nello spazio terrestre supposto inerziale il corpo  $\mathfrak{R}$  è vincolato a muoversi su un piano verticale fisso rispetto a terra. Sia  $(x, y)$  tale piano, con  $y$  verticale e orientato verso l'alto.

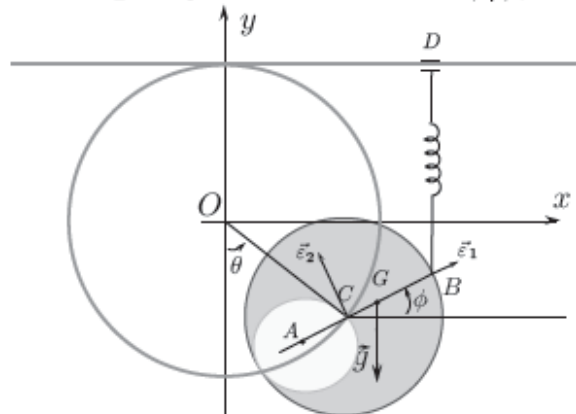
Il centro  $C$  del disco è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa nel piano  $(x, y)$ , avente centro nell'origine  $O$  del sistema di riferimento e raggio  $R =: \beta r$  con  $\beta > 1$ .

Sia  $\theta$  l'anomalia che il vettore  $\overrightarrow{OC}$  forma rispetto al versore  $-\vec{e}_2$  contata positivamente nel verso antiorario rispetto a  $\vec{e}_3$ , sia  $B$  il punto fisso sul bordo del disco e di coordinate (relative)  $(r, 0, 0)$ , e sia  $\phi$  l'anomalia che il vettore  $\overrightarrow{CB}$  forma rispetto al versore  $\vec{e}_1$  contata positivamente nel verso antiorario rispetto a  $\vec{e}_3$ .

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema, oltre ai pesi e alla sollecitazione vincolare, agisce una forza elastica, di costante elastica  $k$ , applicata al punto  $B$  e avente centro in un punto  $D$  del sistema di riferimento che scorre sull'asse  $y = R$  in modo da essere costantemente sulla verticale per  $B$  (e cioè tale che  $x_B \equiv x_D$ ).

Si assumano come coordinate lagrangiane le due anomalie  $\theta$  e  $\phi$ , si introduca la costante positiva  $\rho$  tale che  $\mathfrak{M}g =: \rho k R$ , e si risolvano i seguenti punti usando le costanti  $r, \rho, \beta$ .



- 0) Dimostrare che sussistono le relazioni  $\xi_G = r/6$ , e  $J_{G, \vec{e}_3} = \frac{37}{72} \mathfrak{M} r^2$ .
- 1) Esprimere le energie cinetica e potenziale del sistema e ricavarne le equazioni di Lagrange.
- 2) Determinare, con i particolari valori  $\rho = 8$  e  $\beta = 2$ , le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità, mostrando che l'unica posizione stabile è  $C_1 = (\theta_1 = 0, \phi_1 = \pi/2)$ .
- 3) Scrivere le equazioni cardinali e (*facoltativo*) verificare le equazioni trovate nel Punto 1).
- 4) Ricavare esplicitamente (in funzione delle  $k, r, \rho, \beta$ ) le espressioni globali  $(\vec{F}^v, \vec{M}_G^v)$  della sollecitazione vincolare con la quale la guida agisce sul disco in un istante in cui si hanno  $(\theta_0 = 0, \phi_0 = \pi/2, \dot{\theta}_0 = \sqrt{g/R}, \dot{\phi}_0 = \sqrt{6g/R})$ , e specificare il valore assunto dalla costante  $c$  tale che  $\vec{M}_G^v = c \mathfrak{M} g r \vec{e}_3$ .
- 5) Ancora con i valori  $\rho = 8$  e  $\beta = 2$ , scrivere le equazioni di moto linearizzate nell'intorno della posizione  $C_1$ , e l'equazione delle frequenze proprie  $\nu_1, \nu_2$ . Infine esprimere (formalmente) la soluzione di tali equazioni in funzione di arbitrari dati iniziali:  $(\theta_0, \phi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\phi}_0)$ .

□

### Risoluzione IV APP LUG 2018

Punto 0) L'ascissa  $\xi_G$  del baricentro e il momento d'inerzia  $J_{G, \vec{e}_3}$  del corpo  $\mathfrak{R}$  sono conseguenze delle seguenti

$$0 = \mu\pi \frac{r^2}{4} \left(-\frac{r}{2}\right) + \mu\pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) \xi_G, \quad \text{con } \mu\pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \mathfrak{M}$$

$$\mu\pi r^2 \frac{r^2}{2} - \mu\pi \frac{r^2}{4} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}\right) = \mathfrak{M} \xi_G^2 + J_{G, \vec{e}_3}, \quad \mathfrak{M} \xi_G = \mu\pi \frac{r^2}{4} \frac{r}{2} = \frac{4}{3} \mathfrak{M} \frac{r}{8}.$$

Pertanto  $\mathfrak{M} \xi_G^2 + J_{G, \bar{e}_3} = \frac{13}{8} \mu \pi r^2 \frac{r^2}{4}$  e quindi, dato che  $\frac{1}{36} + \frac{37}{72} = \frac{39}{72} = \frac{13}{24}$ ,

$$\xi_G = \frac{r}{6} \quad \text{e} \quad J_{G, \bar{e}_3} = \mathfrak{M} r^2 \left( \frac{13}{24} - \frac{1}{36} \right) = \frac{37}{72} \mathfrak{M} r^2 \quad \text{insieme con} \quad \mathfrak{M} \xi_G^2 + J_{G, \bar{e}_3} = \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 .$$

Punto 1) Sussistono le relazioni (nelle quali non verrà scritta la terza componente dei vettori se questi sono sul piano  $(x, y)$  )

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OC})_e &= R \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, & (\bar{e}_1)_e &= \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} & (\overrightarrow{CB})_e &= r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \\ (\overrightarrow{OG})_e &= R \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + \xi_G \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, & (\overrightarrow{OB})_e &= R \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \\ (\vec{v}_C)_e &= R \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, & (\vec{v}_G)_e &= R \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \xi_G \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \\ (\vec{a}_C)_e &= R \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{pmatrix} & (\overrightarrow{BD})_e &= \begin{pmatrix} 0 \\ R + R \cos \theta - r \sin \phi \end{pmatrix}, \\ (\vec{a}_G)_e &= R \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{pmatrix} + \xi_G \begin{pmatrix} -\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Di conseguenza si hanno le

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathfrak{M} g y_G + \frac{1}{2} k (R + R \cos \theta - r \sin \phi)^2 \\ &= \mathfrak{M} g (-R \cos \theta + \xi_G \sin \phi) + \frac{1}{2} k (R^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \\ &\quad (+2R^2 \cos \theta - 2Rr \sin \phi - 2Rr \cos \theta \sin \phi) + \text{cost.} \\ &= \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} k r^2 \sin^2 \phi + (-\mathfrak{M} g + kR) R \cos \theta \\ &\quad + (\mathfrak{M} g/6 - kR) r \sin \phi - kRr \cos \theta \sin \phi + \text{cost.} , \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{M} \xi_G^2 \dot{\phi}^2 + \mathfrak{M} R \xi_G \dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta - \phi) + \frac{1}{2} J_{G, \bar{e}_3} \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{M} r^2 \frac{13}{24} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{6} \mathfrak{M} Rr \dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta - \phi) , \end{aligned}$$

e quindi

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} &= -k R^2 \cos \theta \sin \theta - (-\mathfrak{M} g + kR) R \sin \theta + kRr \sin \theta \sin \phi \\ &= R (kr \sin \phi - kR \cos \theta + (\mathfrak{M} g - kR)) \sin \theta \\ &= \beta k r^2 (\sin \phi - \beta \cos \theta + \beta(\rho - 1)) \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} &= k r^2 \cos \phi \sin \phi + (\mathfrak{M} g/6 - kR) r \cos \phi - kRr \cos \theta \cos \phi \\ &= r \left( kr \sin \phi - kR \cos \theta + \left( \frac{1}{6} \mathfrak{M} g - kR \right) \right) \cos \phi \\ &= k r^2 \left( \sin \phi - \beta \cos \theta + \beta \left( \frac{\rho}{6} - 1 \right) \right) \cos \phi \end{aligned} \right. \quad (5.0.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} &= \mathfrak{M} R^2 \dot{\theta} + \frac{1}{6} \mathfrak{M} Rr \dot{\phi} \sin(\theta - \phi) \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \phi} &= \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 \dot{\phi} + \frac{1}{6} \mathfrak{M} Rr \dot{\theta} \sin(\theta - \phi) \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} &= +\frac{1}{6} \mathfrak{M} Rr \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \phi} &= -\frac{1}{6} \mathfrak{M} Rr \dot{\phi} \dot{\theta} \cos(\theta - \phi) . \end{aligned} \right. \quad (5.0.13)$$

Dalle (5.0.12) e (5.0.13) seguono le equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\theta \\ \mathcal{L}_\phi \end{cases} \begin{cases} \mathfrak{M} R^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \ddot{\phi} \sin(\theta - \phi) - \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \dot{\phi}^2 \cos(\theta - \phi) = \\ -R \left( k r \sin \phi - k R \cos \theta + (\mathfrak{M} g - k R) \right) \sin \theta \\ + \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \ddot{\theta} \sin(\theta - \phi) + \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 \ddot{\phi} + \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \dot{\theta}^2 \cos(\theta - \phi) = \\ -r \left( k r \sin \phi - k R \cos \theta + \left( \frac{1}{6} \mathfrak{M} g - k R \right) \right) \cos \phi \end{cases} \quad (5.0.14)$$

Punto 2) Dalle (5.0.12) si ricavano le condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} R \left( k r \sin \phi - k R \cos \theta + (\mathfrak{M} g - k R) \right) \sin \theta = 0 \\ r \left( k r \sin \phi - k R \cos \theta + \left( \frac{1}{6} \mathfrak{M} g - k R \right) \right) \cos \phi = 0 \end{cases}$$

ovvero, essendo  $kR = k\beta r$ , le

$$\begin{cases} (\sin \phi - \beta \cos \theta + \beta(\rho - 1)) \sin \theta = 0, \\ (\sin \phi - \beta \cos \theta + \beta(\frac{\rho}{6} - 1)) \cos \phi = 0. \end{cases} \quad (5.0.15)$$

Pertanto, con i dati  $\rho = 8$  e  $\beta = 2$  esse diventano:

$$\begin{cases} (\sin \phi - 2 \cos \theta + 14) \sin \theta = 0, \\ (\sin \phi - 2 \cos \theta + \frac{2}{3}) \cos \phi = 0, \end{cases}$$

e forniscono  $\sin \theta = 0$  come condizione necessaria; a questa si aggiunge  $\cos \phi (\sin \phi + 2(\mp 1 + \frac{1}{3}))$  il cui coefficiente è comunque diverso da zero. Rimangono quindi solo le seguenti quattro posizioni di equilibrio

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 = 0 \\ \phi_1 = \pi/2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 = 0 \\ \phi_2 = -\pi/2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 = \pi \\ \phi_3 = \pi/2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_4 = \begin{pmatrix} \theta_4 = \pi \\ \phi_4 = -\pi/2 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, dalle (5.0.12) e (5.0.13) si ricavano anche le

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta^2} = R \left( k r \sin \phi - k R \cos \theta + (\mathfrak{M} g - k R) \right) \cos \theta + k R^2 \sin^2 \theta \\ \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^2} = -r \left( k r \sin \phi - k R \cos \theta + \left( \frac{1}{6} \mathfrak{M} g - k R \right) \right) \sin \phi + k r^2 \cos^2 \phi \\ \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta \partial \phi} = k R r \sin \theta \cos \phi \end{cases} \quad (5.0.16)$$

oltre che le

$$\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}^2} = \mathfrak{M} R^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot{\phi}^2} = \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{\phi}} = \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \sin(\theta - \phi). \quad (5.0.17)$$

Ne seguono in particolare, con  $\boxed{\mathfrak{M} g =: \rho k R}$  e con  $\boxed{\beta := R/r}$ , le

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{M} R^2 & \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \sin(\theta - \phi) \\ \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \sin(\theta - \phi) & \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b} &= k r^2 \begin{pmatrix} \beta (\sin \phi - \beta \cos \theta + \beta(\rho - 1)) \cos \theta + \beta^2 \sin^2 \theta & \beta \sin \theta \cos \phi \\ \beta \sin \theta \cos \phi & -(\sin \phi - \beta \cos \theta + \beta(\frac{\rho}{6} - 1)) \sin \phi + \cos^2 \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.0.18)$$

o anche

$$\mathbf{b} = kr^2 \begin{pmatrix} -4 \cos 2\theta + 2 \sin \phi \cos \theta + 28 \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \phi \\ 2 \sin \theta \cos \phi & -\cos 2\theta + 2 \cos \theta \sin \phi - \frac{2}{3} \sin \phi \end{pmatrix}$$

Queste si specializzano nelle

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= kr^2 \begin{pmatrix} \beta(1 + \beta(\rho - 2)) & 0 \\ 0 & -(1 + \beta(\frac{\rho}{6} - 2)) \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_3 &= kr^2 \begin{pmatrix} -\beta(1 + \rho\beta) & 0 \\ 0 & -(1 + \frac{\rho}{6}\beta) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}_2 &= kr^2 \begin{pmatrix} \beta(-1 + \beta(\rho - 2)) & 0 \\ 0 & (-1 + \beta(\frac{\rho}{6} - 2)) \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_4 &= kr^2 \begin{pmatrix} -\beta(-1 + \rho\beta) & 0 \\ 0 & (-1 + \frac{\rho}{6}\beta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e cioè nelle

$$\mathbf{b}_1 = kr^2 \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = kr^2 \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = kr^2 \begin{pmatrix} -34 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = kr^2 \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

che permettono di concludere che la  $\mathcal{C}_1 = (0, \pi/2)$  è l'unica posizione di equilibrio stabile.

Punto 3) Le equazioni cardinali sono invece

$$\begin{cases} \mathfrak{M} \vec{a}_G = \mathfrak{M} \vec{g} - k \overrightarrow{DB} + \vec{F}^v \\ \dot{\vec{K}}^G = -\overrightarrow{GB} \times k \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GC} \times \vec{F}^v + \vec{M}_C^v \end{cases} \quad (5.0.19)$$

dalle quali ricavare, siccome i vincoli sono tutti senza attrito, che  $F_z^v = 0$  e che quindi  $\vec{M}_C^v \perp \vec{e}_3$  è nulla. Poi, dovendo essere

$$\begin{cases} \vec{F}^v \times \overrightarrow{OC} = (\mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} + k \overrightarrow{DB}) \times \overrightarrow{OC} = 0 \\ \vec{F}^v \times \overrightarrow{CG} = \dot{\vec{K}}^G + \overrightarrow{GB} \times k \overrightarrow{DB} \end{cases} \quad (5.0.20)$$

dalle stesse (5.0.19) si deducono le condizioni

$$\begin{cases} (\mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} + k \overrightarrow{DB})_x y_C = (\mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} + k \overrightarrow{DB})_y x_C \\ (\mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} + k \overrightarrow{DB})_x (y_G - y_C) - (\mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} + k \overrightarrow{DB})_y (x_G - x_C) \\ = J_{G, \vec{e}_3} \ddot{\phi} - \frac{5}{6} r \vec{e}_1 \times k(R + R \cos \theta - r \sin \phi) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \quad (5.0.21)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{M} R \ddot{x}_G \cos \theta &= (\mathfrak{M} \ddot{y}_G + \mathfrak{M} g - k(R + R \cos \theta - r \sin \phi)) R \sin \theta \\ \mathfrak{M} \frac{r}{6} \ddot{x}_G \sin \phi - (\mathfrak{M} \ddot{y}_G + \mathfrak{M} g - k(R + R \cos \theta - r \sin \phi)) \frac{r}{6} \cos \phi \\ &= \frac{37}{72} \mathfrak{M} r^2 \ddot{\phi} - \frac{5}{6} kr(R + R \cos \theta - r \sin \phi) \cos \phi \end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} R (\ddot{x}_G \cos \theta + \ddot{y}_G \sin \theta) &= (-\mathfrak{M} g + k(R + R \cos \theta - r \sin \phi)) R \sin \theta \\ \mathfrak{M} \frac{r}{6} (-\ddot{x}_G \sin \phi + \ddot{y}_G \cos \phi) + (\mathfrak{M} g - k(R + R \cos \theta - r \sin \phi)) \frac{r}{6} \cos \phi, \\ &= -\frac{37}{72} \mathfrak{M} r^2 \ddot{\phi} + \frac{5}{6} kr(R + R \cos \theta - r \sin \phi) \cos \phi, \end{aligned}$$

equazioni, queste, che coincidono (provare per credere) con le (5.0.14). D'altra parte, proiettando la prima equazione cardinale lungo la tangente alla guida:  $(\vec{T})_e = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  si ha:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \beta r \ddot{\theta} \cos^2 \theta - \mathfrak{M} \beta r \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - \mathfrak{M} \frac{r}{6} \ddot{\phi} \sin \phi \cos \theta - \mathfrak{M} \frac{r}{6} \dot{\phi}^2 \cos \phi \cos \theta + \\ + \mathfrak{M} \beta r \ddot{\theta} \sin^2 \theta + \mathfrak{M} \beta r \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + \mathfrak{M} \frac{r}{6} \ddot{\phi} \cos \phi \sin \theta - \mathfrak{M} \frac{r}{6} \dot{\phi}^2 \sin \phi \sin \theta \\ = kr \sin \theta (\beta \cos \theta - \sin \phi + \beta) - \mathfrak{M} g \sin \theta. \end{aligned}$$

che è la prima Lagrange. A sua volta, e usando la matrice di trasformazione  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , per ottenere le  $\mathcal{E}$ -componenti dei vettori:

$$\begin{aligned} (\vec{a}_G)_\mathcal{E} &= \begin{pmatrix} \beta r \ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) - \beta r \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi) - \frac{r}{6} \dot{\phi}^2 \\ \beta r \ddot{\theta} \sin(\theta - \phi) + \beta r \dot{\theta}^2 \cos(\theta - \phi) + \frac{r}{6} \dot{\phi}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{GB} &= -5 \vec{GC}, \\ (\vec{GC})_\mathcal{E} &= \begin{pmatrix} -r/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & (\vec{GC} \times)_\mathcal{E} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r/6 \\ 0 & -r/6 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

l'equazione:

$$\dot{K}_G = \vec{GC} \times (\mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} - 6k \vec{BD}), \quad \text{con} \quad (\vec{BD})_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} r \sin \phi (\beta \cos \theta - \sin \phi + \beta) \\ r \cos \phi (\beta \cos \theta - \sin \phi + \beta) \end{pmatrix},$$

proiettata lungo  $\vec{e}_3$  fornisce la seconda equazione di Lagrange.

*Punto 4)* Dalle (5.0.19) si ricava allora  $\vec{F}^v = \mathfrak{M} \vec{a}_G - \mathfrak{M} \vec{g} + k \vec{DB}$  con la quale è possibile calcolare la  $\vec{M}_G^v = \vec{M}_G^v + \vec{GC} \times \vec{F}^v = \vec{F}^v \times \vec{CG}$ . Ma per  $\theta_0 = 0$  e  $\phi_0 = \pi/2$  si hanno

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} \vec{a}_G)_e &= \mathfrak{M} R \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{pmatrix} + \mathfrak{M} \xi_G \begin{pmatrix} -\ddot{\phi} \\ -\dot{\phi}^2 \end{pmatrix}, \\ (-\mathfrak{M} \vec{g})_e &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{M} g \end{pmatrix}, & (k \vec{DB})_e &= k \begin{pmatrix} 0 \\ -2R + r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi se ne conclude che per tali valori si ha

$$(\vec{F}^v)_e = \begin{pmatrix} \mathfrak{M} R \ddot{\theta} \\ \mathfrak{M} R \dot{\theta}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathfrak{M} \xi_G \ddot{\phi} \\ -\mathfrak{M} \xi_G \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{M} g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2kR + kr \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, i valori delle  $\ddot{\theta}_0$  e  $\ddot{\phi}_0$  si possono ricavare a partire dalle equazioni di Lagrange: (5.0.14). Infatti, per  $\theta_0 = 0$  e  $\phi_0 = \pi/2$  quelle diventano:

$$\mathfrak{M} R^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \ddot{\phi} = 0, \quad -\frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \ddot{\theta} + \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 \ddot{\phi} = 0,$$

e dunque necessariamente  $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\phi}_0 = 0$ . Tramite queste si ricava la

$$\begin{aligned} (\vec{F}^v)_e &= \begin{pmatrix} \mathfrak{M} R \ddot{\theta} - \mathfrak{M} \xi_G \ddot{\phi} \\ \mathfrak{M} g(1 - \frac{1}{\beta}) + \mathfrak{M} g - 2kR + kr \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{M} g(2 - \frac{1}{\beta}) - 2kR + kr \end{pmatrix} = \mathfrak{M} g \begin{pmatrix} 0 \\ (2 - \frac{1}{\beta}) - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{\beta\rho} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e questa fornisce  $\vec{M}_G^v = \vec{F}^v \times \vec{CG} = c \mathfrak{M} g r \vec{e}_3$  con  $c = 0$  dato il parallelismo fra i due vettori.

*Punto 5)* Le linearizzate delle (5.0.14) nella posizione  $(\theta_1 = 0, \phi_1 = \pi/2)$  (ancora con  $\beta = 2$  e  $\rho = 8$ ) sono  $\mathbf{a}_1 \ddot{r} + \mathbf{b}_1 r = 0$  per  $r := (\theta, \phi - \frac{\pi}{2})$  e con  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M} R^2 & \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \sin(\theta - \phi) \\ \frac{1}{6} \mathfrak{M} R r \sin(\theta - \phi) & \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 \end{pmatrix}$  che diviene  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4\mathfrak{M} r^2 & -\frac{1}{3} \mathfrak{M} r^2 \\ -\frac{1}{3} \mathfrak{M} r^2 & \frac{13}{24} \mathfrak{M} r^2 \end{pmatrix}$ , e con  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 26 kr^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} kr^2 \end{pmatrix}$ . Dunque esse sono:

$$\begin{cases} 4\mathfrak{M} \ddot{\theta} - \frac{1}{3} \mathfrak{M} \ddot{\phi} = -26 k \theta \\ -\frac{1}{3} \mathfrak{M} \ddot{\theta} + \frac{13}{24} \mathfrak{M} \ddot{\phi} = -\frac{1}{3} k (\phi - \frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (5.0.22)$$

Per trovare i corrispondenti modi normali occorre poi risolvere l'equazione

$$\text{Det} \left( \mathbf{b}_1 - \lambda \mathbf{a}_1 \right) = \text{Det} \begin{pmatrix} 26k - 4\lambda\mathfrak{M} & \frac{1}{3}\lambda\mathfrak{M} \\ \frac{1}{3}\lambda\mathfrak{M} & \frac{1}{3}k - \frac{13}{24}\lambda\mathfrak{M} \end{pmatrix} = 0,$$

che diviene

$$\left( \frac{13}{6} - \frac{1}{9} \right) \mathfrak{M}^2 \lambda^2 - \mathfrak{M} k \left( \frac{4}{3} + \frac{13 \cdot 13}{12} \right) \lambda + \frac{26}{3} k^2 = 0,$$

o anche  $74 \frac{\mathfrak{M}^2}{k^2} \lambda^2 - 555 \frac{\mathfrak{M}}{k} \lambda + 312 = 0$ , da cui le  $\nu_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$ .

Autovettori sono allora le soluzioni delle

$$\begin{aligned} (26k - 4\lambda_1 \mathfrak{M}) \alpha_1 + \frac{1}{3} \lambda_1 \mathfrak{M} \beta_1 &= 0, \\ (26k - 4\lambda_2 \mathfrak{M}) \alpha_2 + \frac{1}{3} \lambda_2 \mathfrak{M} \beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

da cui segue la corrispondente matrice di trasformazione  $\mathbf{P}$ . Con questa, e con le  $\nu_{1,2} := \sqrt{\lambda_{1,2}}$ , si calcolano le

$$\begin{pmatrix} \theta^{lin}(t) \\ \phi^{lin}(t) - \pi/2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \cos \nu_1 t & 0 \\ 0 & \cos \nu_2 t \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 - \pi/2 \end{pmatrix} + \mathbf{P} \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1} \sin \nu_1 t & 0 \\ 0 & \frac{1}{\nu_2} \sin \nu_2 t \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\phi}_0 \end{pmatrix}$$