(1)

E1 i) La funzione è regolare a tratti in $\mathbb{R}$, discontinua nei punti $\frac{3}{2}\pi + k3\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.
La serie di Fourier di $f(x)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e ha per somma

$$S(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{3}{2}\pi + k3\pi \\ 0 & x = \frac{3}{2}\pi + k3\pi \end{cases}$$

Converge uniformemente in ogni intervallo $[a,b]$ contenuto nell'insieme di continuità di $f(x)$.
Converge in media quadratica perché $f(x)$ è di quadrato sommabile in $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ in quanto continua. Non converge totalmente in $\mathbb{R}$ perché $S(x)$ è discontinua in $\mathbb{R}$.

ii)

$$S(\tfrac{23}{2}\pi) = S(-\tfrac{\pi}{2}) = f(-\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4}$$

$-\frac{\pi}{2}$ punto di continuità

$$S(\tfrac{21}{2}\pi) = S(\tfrac{3}{2}\pi) = 0$$

$\frac{3}{2}\pi$ punto di discontinuità.

iii) La serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$ perché $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$.

E2. Esaminiamo $F_1(s)$. Se consideriamo la funzione

$$G(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

essa è olomorfa per $\mathrm{Re}(s) > -1$ e $|G(s)| \simeq \frac{1}{|s|^2}$ per $|s| \to +\infty$ $(k=2)$. Dunque è trasformata di un segnale che può essere ricostruito come

$$g(t) = \mathrm{res}\left(\frac{e^{st}}{(s+1)^2}, -1\right) = \frac{d}{ds} e^{st}\Big|_{s=-1} = e^{st} \cdot t\Big|_{s=-1} = e^{-t} \cdot t$$

Il segnale di cui $F_1(s)$ è trasformata è dunque

$$f_1(t)=\begin{cases} e^{-(t-2)}(t-2) & t\geq 2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda $F_2(s)$ non può essere trasformata di alcun segnale perché non è limitata in nessun semipiano $\operatorname{Re}(s)>\sigma_0$ (ricordare che $|e^{-2s^2}|=e^{-2(x^2-y^2)}$ se $s=x+iy$).

E3) La funzione ha un polo di ordine 1 in $z_0=0$.

Inoltre $\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\dots$ in $\mathbb{C}^*$ e $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots$ per $|z|<1$.

Pertanto, per $|z|<1$:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2(1-z)}=\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\dots\right)(1+z+z^2+\dots)=\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1 z+\dots$$

e

$$\frac{1}{z}+1+z-\frac{z}{3!}-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\dots=\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1 z+$$

Dunque $c_{-1}=1$, $c_0=1$, $c_1=\frac{5}{6}$.

Il raggio dell'intorno è 1.

D1) La funzione $\operatorname{Log}(1-z^2)$ è olomorfa in $\mathbb{C}-\{z=x+iy:\ |x|\geq 1,\ y=0\}$ che è un aperto semplicemente connesso. Dunque ammette primitiva in tale aperto e ciò equivale al fatto che l'integrale sia lo stesso lungo tutte le curve contenute in tale aperto che abbiano gli stessi estremi. (γ_1 e γ_2 sono contenute in tale insieme e hanno gli stessi estremi).

3

D2.

(ii) L'unico punto singolare è $z_0 = 2i$ ed è una singolarità essenziale per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{Z}$.

Poiché $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2i)^{2n+1-k}} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$ $\quad z \in \mathbb{C} - \{2i\}$

$$\operatorname{res}(f(z), 2i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \text{ o } k \in \{1,3,5,\dots\} \\ (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{(1+k)!} & \text{se } k \in \{0,2,4,6,\dots\} \end{cases}$$

(iii) La funzione ammette primitive in $\mathbb{C} - \{2i\}$ per $k < 0$ e per $k \in \{1,3,5,\dots\}$.

Infatti per questi valori $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ per tutte le curve chiuse γ contenute in $\mathbb{C} - \{2i\}$.