Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Corso di Laurea Ingegneria Edile-Architettura LM-4 c.u.

ANALISI MATEMATICA 1
a.a. 2021-2022

1 I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

Introduzione al corso.
Cenni di teoria degli insiemi: unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano.
Notazione dei quantificatori.
Cenni sui numeri naturali, interi relativi, razionali, reali $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
Definizione assiomatica dei numeri reali.

Proposizione 1.1 *Non esiste alcun numero razionale q tale che $q^2 = 2$. (dim)*

Osservazione 1.2 $\mathbb{Q}$ *non soddisfa l'assioma di completezza.*

Intervalli.
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.

Esercizio 1.3 *Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.4 *Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.5 *Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 < x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.6 *Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.7 *Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.8 *Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.9 *Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, x > 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Esercizio 1.10 *Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, x > 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.*

Funzioni e rappresentazione cartesiana

Definizione 1.11 *Funzione, dominio, codominio, grafico.*

Definizione 1.12 *Funzione iniettiva, suriettiva, biettiva*

Definizione 1.13 *Funzione invertibile. Funzione inversa.*

Definizione 1.14 *Funzioni crescenti e decrescenti, strettamente decrescenti e strettamente crescenti. Funzioni monotone.*

Esercizio 1.15 *Studio delle funzioni* $f(x) = 3$, $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$.

Definizione 1.16 *Operazioni con le funzioni.*

Definizione 1.17 *Funzione composta.*

Esercizio 1.18 *Siano* $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$. *Determinare* f^{-1}, g^{-1},$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ *e* $f \circ g$

Esercizio 1.19 *Siano* $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^5$. *Determinare* f^{-1}, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ *e* $f \circ g$

Definizione 1.20 *Funzioni lineari. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.21 *Funzione valore assoluto. Principali proprietà. Grafici.*

Proposizione 1.22 *Per ogni numero reale* $r \geq 0$, *risulta*

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r.$$

Proposizione 1.23 *Disuguaglianza triangolare. (dim)*

Esercizio 1.24 *Risolvere*
$|x| = 4$, $|x| \leq 3$, $|x + 2| \leq 3$, $x^2 + 2|x| - 3 < 0$, $x^2 - 2|x| - 3 > 0$, $|x^2 + 1| \geq 2$.

Definizione 1.25 *Le funzioni potenza. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.26 *Funzioni esponenziali. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.27 *Logaritmi. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.28 *Funzione seno ad arcoseno. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.29 *Funzione coseno ad arcocoseno. Principali proprietà. Grafici.*

Esercizio 1.30 *Risolvere*
$\ln_5 x > 2$, $\ln_3 x < \frac{1}{2}$, $\ln_{\frac{1}{7}} x < \sqrt{2}$, $\log_3(1 + \frac{1}{x}) \leq 1$, $2^x > 4$, $4^x > 2$, $e^{|x-1|} < e^x$, $(\frac{1}{3})^{(1-12x)x} < 3$, $(\frac{1}{3})^x > 9$, $\sin x = 5$, $\sin x = 1$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x > 3$, $\cos x > \frac{1}{2}$, $\cos x > -2$, $\cos x < -2$.

Definizione 1.31 *Funzioni tangente ed arcotangente. Principali proprietà. Grafici.*

Esercizio 1.32 *Risolvere* $\tan x = 1$, $\tan x > 0$, $\arcsin x > 0$, $\arccos x < 0$, $\arctan x < 0$, $\arctan x < 4$.

Esercizio 1.33 *Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni* $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}$, $\sqrt{2-x^2}$, $\sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}}$, 3^{2-x^2}, $6^{\cos x}$, $\ln\sqrt{x}$, $\sqrt{\ln x}$, $\sqrt{\tan x}$, $\cos(\sqrt{x})$, $\tan(\sqrt{x})$, $\cos(\sqrt{\tan x})$, $\sqrt[4]{3-\ln_2 x}$, $\ln\sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $3^{\ln x}$, $\sqrt{\ln_{\frac{1}{3}}(2x-1)}$, $(\ln_5 x - 5)^{-\pi}$, $\arcsin(\ln x)$, $\ln_x 6$, $\ln_x x$, $\ln_x(\ln x)$, $\arcsin(2^x)$, x^x, $\frac{\sin\ln x}{\ln x}$, $\ln_x(x^2+4x)$, $\ln_x\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, $\ln_x(x^2-3x+2)$, $\arccos(\frac{x-1}{x+3})$, $\arctan(\frac{\cos x}{x^2+3})$, $\cos(\frac{\arcsin x}{x^3})$.

Proposizione 1.34 *Principio di induzione.*

Esercizio 1.35 *Dimostrare utilizzando il principio di induzione*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$$

$$1+x+x^2+x^3+.........+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

$$1+2+3+..........+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^3+..........+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 1.36 *Dimostrare utilizzando il principio di induzione la crescenza della funzione potenza* x^n, $n \in \mathbb{N}$.

2 COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

Definizione 2.1 *Massimo e minimo di un insieme A di numeri reali.*

Osservazione 2.2 *Il massimo di un insieme, se esiste, è unico. (dim)*

Definizione 2.3 *Maggiorante e minorante di un insieme.*

Definizione 2.4 *Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati.*

Proposizione 2.5 *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste M tale che $|a| < M$, $\forall a \in A$. (dim)*

Osservazione 2.6 *Ci sono insiemi limitati superiormente che non ammettono massimo.*

Definizione 2.7 *Estremo superiore. Estremo inferiore.*

Teorema 2.8 *Teorema di esistenza dell'estremo superiore. (dim)*

Osservazione 2.9 *Il massimo di un insieme, se esiste, è anche estremo superiore.*

Definizione 2.10 *Se A non è limitato superiormente, definiamo* $\sup A = \infty$. *Se A non è limitato inferiormente, definiamo* $\inf A = -\infty$.

Osservazione 2.11 *L'esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente non vale in* $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.12 *Calcolare estremo superiore e inferiore (specificando se si tratta di massimo e minimo) dei seguenti insiemi*
$A = \left\{\frac{n-1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$
$B = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$
$C = \left\{\frac{5n+1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$
$D = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0\}$
$E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 > 0\}$
$F = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 0\}$
$G = \{x \in \mathbb{R}, \sin x > \cos x\}$
$H = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x - 3\right\}$
$I = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x + 3\right\}$
$L = \left\{x \in \mathbb{R}, \log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) > 0\right\}$
$M = \left\{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 > \sqrt{4x + 1}\right\}$
$N = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x + 2} > \sqrt{4 - x}\right\}$
$0 = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 7\}$

Teorema 2.13 *Proprietà di Archimede.*

Teorema 2.14 *Densità di* $\mathbb{Q}$.

Definizione della funzione a^x con $x \in \mathbb{R}$.

Numeri complessi

Motivazione dell'introduzione dei numeri complessi.

Definizione 2.15 *Unità immaginaria.*
Forma algebrica.
Parte reale $Re(z)$ *e parte immaginaria* $Im(z)$ *di un numero complesso.*
Numero complesso coniugato.
Modulo di un numero complesso.

Operazioni tra numeri complessi espressi in forma algebrica.
Rappresentazione grafica dei numeri complessi.

Definizione 2.16 *Forma trigonometrica di un numero complesso.*
Argomento di un numero complesso.

Osservazione 2.17 *L'argomento è determinato a meno di multipli di* 2π.

Regole di passaggio dalla forma cartesiana alla forma trigonometrica.
Operazioni tra numeri complessi espressi in forma trigonometrica.
Moltiplicazione in forma trigonometrica (Formula di De Moivre).
Divisione in forma trigonometrica.

Proposizione 2.18 *Radici n-esime di un numero complesso.*

(dim)

Definizione 2.19 *Forma esponenziale di un numero complesso.*

Operazioni tra numeri complessi espressi in forma esponenziale.

Esercizio 2.20 *Calcolare* z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, z_2/z_1 *con* $z_1=2+3i$ *e* $z_2=3-4i$.

Esercizio 2.21 *Calcolare* z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, z_2/z_1 *con* $z_1=1+i$ *e* $z_2=1-i$.

Esercizio 2.22 *Calcolare*
$(2+3i)(4-5i)$
$\frac{1}{i}$
$\frac{1}{1-i}$
$\frac{1+i}{1-i}$

Esercizio 2.23 *Verificare che* $z=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ *è soluzione di* $z^6=-1$.

Esercizio 2.24 *Calcolare le radici terze di* $z=1$.
Calcolare le radici quadrate di $z=2$.
Calcolare le radici terze di $z=-8$.
Calcolare le radici quarte di $z=1$.

Esercizio 2.25 *Risolvere le seguenti equazioni*
$z^2+z+1=0.$
$iz^2-2z+3i=0$
$z^4+1=0$
$z^6+2^6=0$
$(z-1)^4+81=0$

Teorema 2.26 *Teorema fondamentale dell'algebra. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse, se contate con la loro molteplicità.*

Esercizio 2.27 *Risolvere le seguenti equazioni*
$z^4-(1+i)z^2+i=0.$
$z^4-1=0$
$z^6+2^6=0$
$(z-1)^4-81=0$
$(z-2)^4+16=0$
$z^3-27=0$

Esercizio 2.28 *Determinare la forma algebrica di*
$(1-i)^6$
$(1+i)^8$
$(\frac{1+i}{i-1})^6$

3 LIMITI DI SUCCESSIONI

Definizione 3.1 *Successioni.*

Rappresentazione delle successioni.

Esercizio 3.2 *Rappresentare le seguenti successioni*
$a_n = n$
$a_n = \frac{1}{n}$
$a_n = \frac{n-1}{n}$
$a_n = (-1)^n$
$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$
$a_n = 3$
$a_n = n^2$
$a_n = -n^2$.

Definizione 3.3 *Limite di successione ad un numero reale. Successione convergente.*

Interpretazione grafica del limite.

Esercizio 3.4 *Verificare, tramite la definizione, che*
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Esercizio 3.5 *Verificare che non è vero che*
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$.

Teorema 3.6 *Il limite di una successione, se esiste, è unico. (dim)*

Osservazione 3.7 *Cambiare un numero finito di termini della successione non modifica il suo limite.*

Definizione 3.8 *Limite di successione a $+\infty$. Limite di successione a $-\infty$. Successione divergente.*

Interpretazione grafica del limite.

Esercizio 3.9 *Verificare, tramite la definizione, che*
$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$
$\lim_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$.

Osservazione 3.10 *Ci sono successioni che non ammettono limite. Ad esempio: $a_n = (-1)^n$.*

Definizione 3.11 *Successione regolare. Successione non regolare.*

Definizione 3.12 *Successione infinita. Successione infinitesima.*

Operazioni con i limiti

Proposizione 3.13 *Operazioni con i limiti finiti.*

Esercizio 3.14 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^b} = 0 \ \forall b \in \mathbb{N}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+3n+1}{4n^3+5n^2+7} = \frac{5}{4}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+1}{n^2-2n+1} = -1$.

Proposizione 3.15 *Operazioni con i limiti infiniti.*

Forme indeterminate

$$\infty - \infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad (\infty)^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

Osservazione 3.16 *Dire che un limite è una forma indeterminata non vuole dire che il limite non esiste ma che è necessario uno studio più approfondito.*

Esercizio 3.17 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+1}{4n^3+6n^2+2} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+9n+4}{n^6+1} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - n$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$

Alcuni limiti notevoli

$\lim_{n\to\infty} a^n$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^b}$
$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
$a_n \to 0 \Rightarrow \sin a_n \to 0$
$a_n \to 0 \Rightarrow \cos a_n \to 1$
$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$

Infiniti di ordine crescente

Tabella degli infiniti. Le seguenti successioni sono in ordine crescente di infinito:

$$\log n, n^b, a^n, n!, n^n.$$

Osservazione 3.18 *Il precedente ordinamento degli infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato alla stessa potenza positiva. Esempio:* $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^5}{n^5} = 0$.

Osservazione 3.19 *Il seguente ordinamento degli infiniti*

$$\log n, n^b, a^n, n^n$$

continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato ad una potenza positiva differente. Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{5000000}}{3^{\frac{n}{69897543}}} = 0$.

Definizione 3.20 *Successioni limitate superiormente, limitate inferiormente, limitate.*

Teorema 3.21 *Ogni successione convergente è limitata.*

Osservazione 3.22 *L'esempio della successione* $a_n = (-1)^n$ *mostra che il viceversa non è vero.*

Teoremi di confronto

Teorema 3.23 *Teorema della permanenza del segno.*

Teorema 3.24 *Teorema dei carabinieri.*

Teorema 3.25 *Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Se a_n è limitata e b_n è infinitesima, allora $a_n b_n$ è infinitesima.*

Esercizio 3.26 *Calcolare*
$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+1} = 0.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^3} = 0$

Successione monotone

Definizione 3.27 *Successioni crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone.*

Teorema 3.28 *Teorema sulle successioni monotone.*

Osservazione 3.29 *Una successione crescente a_n ammette sempre limite, uguale a $\sup_n a_n$. Tale limite è quindi finito se a_n è limitata superiormente, altrimenti vale $+\infty$.*

Esempio 3.30 *Dimostrare che la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata, quindi converge. Il suo limite è un numero irrazionale che si denota con e il cui sviluppo decimale comincia con 2,7182818284....*

Esercizio 3.31 *Dimostrare che la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente e limitata inferiormente. Qual è il suo limite?*

Esercizio 3.32 *Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n-1}{n}$ è strettamente crescente e limitata superiormente. Qual è il suo limite?*

Esercizio 3.33 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{5n^3} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \sin n$ *non esiste*
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} 4^n = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$
$\lim_{n\to\infty} 6^n - 7^n = -\infty$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 1$
$\lim_{n\to\infty} n - \log n = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{n}\right)^n = e^7$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$
$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{4}{n} = 4$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^2+n^3+6^n}{3^n+8^n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin n-e^n}{\log n^2+n^n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{(e^{2n}-1)} = 1$
$\lim_{n\to\infty}(n - \frac{4}{n})(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1) = \frac{3}{2}$
$\lim_{n\to\infty} \left[\sin(\sin^4 n)\right]^{\frac{n}{4}} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{n}}{\sin\frac{5}{n}} = \frac{2}{5}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n^2 \sin\frac{1}{n}} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{5}{n} = \frac{5}{3}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n^3}{n!} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^3}{n^3} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n = \infty$
$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{3}{n^2} = 3$
$\lim_{n\to\infty} n^4 \cos\frac{3}{n^4} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \log n^3 \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-5}{n}\right)^{3n} = e^{-15}$

Esercizio 3.34 *Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\alpha}\cos^5 n}{n(e^{2n}-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Esercizio 3.35 *Calcolare l'area di un cerchio con l'approssimazione delle area di poligoni regolari inscritti.*

4 LIMITI DI FUNZIONI

Introduzione del concetto di limite per le funzioni.

Definizione 4.1 *Punto isolato. Punto di accumulazione*

Definizione 4.2 *Limite di una funzione.*

Definizione 4.3 *Limite destro e limite sinistro di una funzione.*

Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema 4.4 *TEOREMA PONTE. Le seguenti relazioni sono tra loro equivalenti* ($x_0, l \in \mathbb{R}$)

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\}\, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \to l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Interpretazione grafica del limite.

Esempi e proprietà dei limiti di funzione.

Teorema 4.5 *Teoremi di confronto.*

Teorema 4.6 *Operazioni con i limiti di funzioni.*

Teorema 4.7 *Limiti di funzione composte.*

Osservazione 4.8 *Si tratta di un* cambio di variabile *nel limite.*

Esercizio 4.9 *Applicando la definizione di limite, verificare che*
$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2} = -2$
$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
$\lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$

Alcuni limiti notevoli.
$\lim_{x\to\infty} a^x$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \ b > 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \ b > 0 \ a > 1$

Esercizio 4.10 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^b-1}{x} = b$

Esercizio 4.11 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{x\to 2} 3x = 6$
$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{3}.$
$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$
$\lim_{x\to\infty} -x^7 = -\infty.$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^b} = 0 \ \forall b \in \mathbb{N}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+3x+1}{5x^4+8x^2+2} = \frac{3}{5}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^8-1}{x^6+1} = \infty.$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^3+6x^2+2} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^8+9x^4+4}{x^9+1} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - x = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x}+1} - \infty$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x^4}{x} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sin x$ *non esiste*
$\lim_{x\to\infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$
$\lim_{x\to\infty} 5^x = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} 9^x - 7^x = \infty$
$\lim_{x\to\infty} x - \log x = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x = e^2$
$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{2x} = \frac{5}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} = \infty$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin 2x} = 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 2x} = 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$
$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1} = \frac{1}{3}$
$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)^4}{(e^{x^2-9}-1)^4} = \frac{1}{6^4}$
$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+bx+c} - x = \frac{b}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{2x}}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-e^{2x}}$

FUNZIONI CONTINUE

Definizione 4.12 *Funzione continua in un punto. Funzione continua in un intervallo.*

Teorema 4.13 *Operazioni con i limiti di funzioni continue.*

Osservazione 4.14 *Le funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione: le potenze $f(x) = x^a$, le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$, con $a > 0$, le funzioni logaritmiche$f(x) = log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$, le funzioni trigonometriche $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$.*

Definizione 4.15 *Discontinuità eliminabile, di prima specie, di seconda specie.*

Esercizio 4.16 *Studiare la continuità delle seguenti funzioni*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.17 *Determinare a e b in modo tale che la seguente funzione sia continua in* $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Esercizio 4.18 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.19 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $(-\pi, \infty)$*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{x^3}}{\sin x^3} & -\sqrt[3]{\pi} < x < 0 \\ -(x+\alpha)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.20 *Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{\ln(x^2+1)} & x > 0 \\ \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.21 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^\alpha}} & x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.22 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(x^{\frac{1}{3}})}{x^\alpha} & x \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.23 *Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} c|x|^\alpha + bx^2 + d & x \leq 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Teorema 4.24 *Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.*

Teorema 4.25 *Teorema dell'esistenza degli zeri.*

Osservazione 4.26 *Tale punto in generale non è unico. Sicuramente è unico se f è strettamente monotona.*

Teorema 4.27 *Teorema di Weierstrass.*

Osservazione 4.28 *Se l'intervallo non è chiuso, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = x$ in $(0, 1)$.*

Osservazione 4.29 *Se l'intervallo non è limitato, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1, \infty)$.*

Osservazione 4.30 *Se f non è continua, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ in $[0, 1]$.*

Teorema 4.31 *Teorema dell'esistenza dei valori intermedi. (dim)*

Teorema 4.32 *Teorema di continuità delle funzioni inverse.*

Osservazione 4.33 *La funzione inversa di una funzione monotona ha la stessa monotonia di f (strettamente crescente se f è strettamente crescente, strettamente decrescente se f è strettamente decrescente).*

5 DERIVATE

Introduzione del concetto di derivata.

Definizione 5.1 *Derivata di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un intervallo. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto.*

Osservazione 5.2 *Una funzione è derivabile in un punto se e solo se esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra in tale punto e coincidono.*

Esempio 5.3 *La derivata di una funzione costante è nulla in ogni punto.*

Teorema 5.4 *Operazioni con le derivate.*

Teorema 5.5 *Teorema di derivazione delle funzioni composte.*

Derivate delle funzioni elementari. Utilizzando la definizione e i teoremi di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$f(x) = x$
$f(x) = x^2$
$f(x) = e^x$
$f(x) = \sin x$
$f(x) = \cos x$
`MER 11.12.19`

Teorema 5.6 *Teorema di derivazione delle funzioni inverse.*

Derivate delle funzioni elementari. Utilizzando la definizione e i teoremi di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$f(x) = x^a$
$f(x) = a^x$
$f(x) = \log_a x$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \arcsin x$
$f(x) = \arccos x$
$f(x) = \arctan x$

Esercizio 5.7 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni*

$f(x) = x^2$
$f(x) = \sqrt[5]{x}$
$f(x) = 4x + \sqrt[4]{x+3} + 38$
$f(x) = 2^x$
$f(x) = (7x+8)^5$
$f(x) = \log_3 x$
$f(x) = \sin 2x$
$f(x) = \cos(3x+4)^2$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \arcsin 6x$
$f(x) = \arccos 8x$
$f(x) = \arctan 3x$
$f(x) = 2^x + 4x + 5$
$f(x) = \sin(\log x)$
$f(x) = \log(\sin x)$
$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
$f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$
$f(x) = \ln(\ln x)$
$f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
$f(x) = (x+1)^{x+2}$
$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$

Teorema 5.8 *Se f è una funzione derivabile in x_0, allora è anche continua in x_0. (dim)*

Osservazione 5.9 *Una funzione continua può non essere derivabile. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x = 0$.*

Esercizio 5.10 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.11 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & x \geq 2 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x(x-2)} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.12 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = |4x - 1 + (5 - 3x)|$$

Esercizio 5.13 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.14 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.15 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.16 *Studiare la derivabilità delle funzioni degli esercizi 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23.*

Esercizio 5.17 *Studiare le seguenti funzioni*

1. $f(x) = e^{2x+4}$
2. $f(x) = \ln(x-3)$
3. $f(x) = \cos(x) + 3$
4. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

specificandone dominio; segno e zeri di f; limiti agli estremi degli intervalli costituenti il dominio; continuità e derivabilità.

Esercizio 5.18 *Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, in modo che la funzione seguente*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2ax+1) + 3x^2 + 3 & x > 0 \\ b & x = 0 \\ (-x)^c + 4\sin x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

sia continua nel suo insieme di definizione.

Significato geometrico della derivata.
Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile nel punto $(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. (dim)

Esercizio 5.19 *Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = 3e^x + 4$ in $x = 2$.*

6 APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

Applicazioni delle derivate per il calcolo dei limiti

Teorema 6.1 *Teorema di L'Hôpital.*

Osservazione 6.2 *Il teorema di L'Hôpital non fornisce informazioni quando* $\lim \frac{f'}{g'}$ *non esiste. In tal caso il limite* $\lim \frac{f}{g}$ *potrebbe esistere o non esistere.*
Esempio. $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x$, *per* $x \to \infty$.
Esempio. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, *per* $x \to 0^+$.
Esempio. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, *per* $x \to 0^+$.

Osservazione 6.3 *Si può iterare il procedimento più volte.*
Esempio. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, *per* $x \to \infty$.

Esercizio 6.4 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(5+2x)}{x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{1-\cos 2x}$
$\lim_{x\to \infty} \sqrt{6x^2+1} - x$
$\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{5}{\sin x}\right)^x$
$\lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$
$\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x}$ *(è una forma indeterminata?)*
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3}$
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+x\sin x}{x^2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{\cos\sqrt{x}-1}$
$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 + 2cos^2 x)^{\tan^2 x} = e^2$

Esercizio 6.5 *Data la funzione* $f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 & x \geq 0 \\ \frac{ln(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x}} & x < 0 \end{cases}$
Stabilire se f *è continua in* $\mathbb{R}$.
Calcolare la derivata sinistra e destra di f *in* 0.
Stabilire se f *è derivabile in* $\mathbb{R}$.

Applicazioni delle derivate per lo studio delle proprietà di funzioni

Definizione 6.6 *Massimo relativo. Minimo relativo.*

Definizione 6.7 *Massimo assoluto. Minimo assoluto.*

Osservazione 6.8 *Il massimo assoluto di f, se esiste, è unico. Il punto di massimo può invece non essere unico.*

Teorema 6.9 *Teorema di Fermat. (dim)*

Significato geometrico del teorema di Fermat.

Osservazione 6.10 *Se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, i punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra: 1. i punti interni dove si annulla la derivata; 2. gli estremi dell'intervallo; 3. gli eventuali punti di non derivabilità.*

Teorema 6.11 *Teorema di Rolle. (dim)*

Significato geometrico del Teorema di Rolle.

Teorema 6.12 *Teorema di Lagrange.*

Significato geometrico del Teorema di Lagrange (dim).

Osservazione 6.13 *La continuità agli estremi dell'intervallo è una ipotesi indispensabile.*
Esempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ *in* $[0,1]$.

Teorema 6.14 *Criterio di monotonia.*

Teorema 6.15 *Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.*

Teorema 6.16 *Criterio di stretta monotonia.*

Osservazione 6.17 *Una funzione strettamente monotona può avere derivata nulla in qualche punto. Esempio: la funzione* $f(x) = x^3$ *è strettamente crescente in* $\mathbb{R}$, *ma la sua derivata si annulla in* $x = 0$.

Definizione 6.18 *Funzione convessa. Funzione concava.*

Teorema 6.19 *Criterio di convessità.*

Definizione 6.20 *Punto di flesso.*

Osservazione 6.21 *In un punto di flesso il grafico di* f *attraversa la retta tangente.*

Osservazione 6.22 *Se* f *è derivabile due volte, allora in un punto di flesso la derivata seconda si annulla.*

Teorema 6.23 *Criterio per i punti di massimo e di minimo (valido per funzioni che ammettono derivata seconda).*

Schema per lo studio di un grafico di funzione.

Esercizio 6.24 *Studiare le seguenti funzioni* f

$f(x) = x^3$
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$
$f(x) = \sin x$
$f(x) = \cos x$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \arcsin x$
$f(x) = \arccos x$
$f(x) = \arctan x$
$f(x) = x^3 - 3x^2$
$f(x) = \frac{x^2+6x+6}{x+1}$
$f(x) = \frac{x^2-x}{x-2}$
$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$
$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$
$f(x) = xe^{-2x^2}$
$f(x) = xe^x$
$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
$f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x}$
$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}}$
$f(x) = xe^{\frac{|x-1|}{x}}$
$f(x) = x \log x$
$f(x) = x^2 \log x$
$f(x) = x \log^2 x$
$f(x) = x^x$
$f(x) = \frac{x}{|x|+|1-x|}$
$f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$
$f(x) = \sin^2 x - \sin x$

specificandone dominio; segno e zeri di f*; limiti agli estremi degli intervalli costituenti il dominio; asintoti; continuità, esistenza e calcolo delle derivata prima* f'*; segno e zeri di* f'*; intervalli di monotonia di* f *e punti stazionari; massimi e minimi relativi; esistenza e calcolo della derivata seconda* f''*: intervalli di concavità e convessità e punti di flesso; grafico di* f*.*

Esercizio 6.25 *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x$ *in* $[0, 2\pi]$.

Esercizio 6.26 *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$ *in* $[0, 2\pi]$.

Esercizio 6.27 *Studiare le funzioni iperboliche*

$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *(seno iperbolico)*
$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *(coseno iperbolico)*
$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ *(tangente iperbolica)*

Applicazione delle derivate per l'approssimazione di una funzione regolare in un intorno di un punto tramite polinomi.

Teorema 6.28 *La formula di Taylor.*

Definizione 6.29 *Formula di Mac Laurin.*

Esercizio 6.30 *Sviluppo delle funzioni elementari.*

Esercizio 6.31 *Sviluppo di Mac-Laurin di*
$f(x) = \sin(3x)$
$f(x) = \cos(2x)$
$f(x) = e^{3x}$
$f(x) = \ln(1+3x)$
$f(x) = (\sin x)^2$
$f(x) = (\cos x)^2$
$f(x) = \sin x^2$
$f(x) = \cos x^2$

Uso della formula nel calcolo dei limiti.

Esercizio 6.32 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{3}$
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right)$
$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{x}} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x\sin x}{x^2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x}}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\log(\cos x)}{x^4} = -\frac{1}{8}$
$\lim_{x\to 1} \frac{(1+x^2)^2\sin(x-1)}{\sqrt{x}\ln x}$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin^2\sqrt{x}-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{2}{3}$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x+(3-\sin^2\sqrt{x})}{x^2} = 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(5^x-2^x)}{\sin x+\log(1-x)}$

7 CALCOLO INTEGRALE PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Introduzione.

Definizione 7.1 *Partizione. Somme integrali.*

Definizione 7.2 *Integrale definito di una funzione limitata f in un intervallo $[a, b]$.*

Osservazione 7.3 *Interpretazione geometrica dell'integrale definito.*

Proprietà dell'integrale.

Teorema 7.4 *Additività dell'integrale rispetto all'intervallo.*

Teorema 7.5 *Linearità dell'integrale.*

Teorema 7.6 *Confronto tra integrali.*

Teorema 7.7 *Teorema della media integrale. (dim)*

Teorema 7.8 *Integrabilità delle funzioni continue.*

Esercizio 7.9 *Calcolare con il metodo di esaustione l'area di un settore di parabola.*

Definizione 7.10 *Funzione integrale.*

Teorema 7.11 *Il teorema fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

Definizione 7.12 *Primitiva.*

Teorema 7.13 *Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo. (dim)*

Teorema 7.14 *Formula fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

Definizione 7.15 *Integrale indefinito.*

Osservazione 7.16 *L'integrale definito $\int_a^b f\,dx$ è un numero reale. L'integrale indefinito $\int f\,dx$ è un insieme di funzioni.*

Tabella degli integrali indefiniti.
Integrazione per decomposizione in somma.
Integrazione per parti. (dim)
Integrazione per sostituzione. (dim)
Calcolo di aree di figure piane.
Formula per il calcolo dell'area.

Esercizio 7.17 *Calcolare l'area di un cerchio di raggio r.*

Esercizio 7.18 *Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Esercizio 7.19 *Calcolare l'area della regione piana compresa fra le 2 parabole di equazioni* $y^2 = 9x$ *e* $x^2 = 9y$.

Integrazione delle funzioni razionali.
Formule di razionalizzazione tramite particolari sostituzioni ($R(y)$ è una funzione razionale fratta)

$\int R(e^x)\,dx$ con $t = e^x$
$\int R(\sin x)\cos x\,dx$ con $t = \sin x$
$\int R(\cos x)\sin x\,dx$ con $t = \cos x$
$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ con $x = a\sin t$
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ con $t = \tan\frac{x}{2}$
$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\,dx$ con $t = \tan x$

Esercizio 7.20 *Calcolare i seguenti integrali*

$\int_1^2 (x^5 + 3x + 6)\,dx$
$\int_0^1 (x+1)^4\,dx$
$\int \cos x \sin x\,dx$
$\int \cos^2 x \sin x\,dx$
$\int \tan x\,dx$
$\int \frac{x}{x+1}\,dx$

$\int \tan^2 x\, dx$
$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\, dx$
$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\, dx$
$\int \frac{x}{x^2+2x+1}\, dx$
$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$
$\int \frac{x}{x^2+x+1}\, dx$
$\int xe^x\, dx$
$\int \log x\, dx$
$\int \cos^2 x\, dx$
$\int \sin^2 x\, dx$
$\int x \cos x\, dx$
$\int x \sin x\, dx$
$\int x^2 \cos x\, dx$
$\int e^x \sin x\, dx$
$\int e^x \cos x\, dx$
$\int \tan 3x\, dx$
$\int x^4 \log x\, dx$
$\int e^{3x} \sin 2x\, dx$
$\int \frac{1}{5+x^2}\, dx$
$\int \sin^2 x\, dx$
$\int \sin^2 x \cos x\, dx$
$\int \quad xe^x\, dx$
$\int \quad x \lg x\, dx$
$\int \quad \arcsin x\, dx$
$\int \quad \arctan x\, dx$
$\int \quad \lg x\, dx$
$\int \quad \frac{\ln \ln x}{x}\, dx$
$\int \quad \arctan \sqrt{x}\, dx$
$\int \quad \frac{\sin x}{(\cos x)^3} e^{\tan x}\, dx$
$\int \tan x\, dx$
$\int (\sin x)^5 cosx\, dx$
$\int (\sin x)^n cosx\, dx$
$\int (\cos x)^n sinx\, dx$
$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx$
$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}\, dx$
$\int \frac{1}{(1+x^2) \arctan x}\, dx$
$\int \sin(ax)\, dx$
$\int \cos(ax)\, dx$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$
$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$
$\int \sqrt{x+2}\, dx$
$\int \sqrt{3-2x^2} x\, dx$
$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\, dx$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$
$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$
$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\, dx$
$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}}\, dx$

$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx$
$\int \quad x \quad e^{x^2}\,dx$
$\int \frac{\lg x}{x}\,dx$
$\int \frac{(\lg x)^n}{x}\,dx$
$\int \frac{1}{(\lg x)^n x}\,dx$
$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\lg x)^2}}\,dx$
$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
$\int \frac{5x}{1+x}\,dx$
$\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx$
$\int \frac{1-x^6+x^2}{1+x^3}\,dx$
$\int \frac{1}{x(1+x)}\,dx$
$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$
$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
$\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$
$\int \frac{e^x}{3e^{2x}-e^x+2}\,dx$
$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx$
$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$
$\int \frac{x+3}{x^2-6x}\,dx$
$\int \frac{3x+1}{x^2-6x+5}\,dx$
$\int \frac{x^2-7x+2}{(x-2)^3}\,dx$
$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx$
$\int_1^{3^{1/4}} \quad \frac{x}{1+x^4}\,dx$
$\int_0^{\lg 2} \quad \sqrt{e^x-1}\,dx$
$\int_{-1}^{4} \quad \mid x^2-3x \mid \,dx$
$\int_{-2}^{1} \frac{3+x}{\sqrt{1+|x|}}\,dx$

Esercizio 7.21 *Calcolare l'area delle regioni limitate da*

- $y = \mid x-1 \mid$; $y=0$; $x=0$; $x=3$.
- $y^2=4x$; $2x+y-4=0$; $y=0$.
- $y=1/x$; $y=0$; $x=a$; $x=5a$, $a>0$.
- $y=-2x+3$; $y=x^2$.
- $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Integrali impropri.

Definizione 7.22 *Integrale improprio in $[a,b)$ di una funzione f non negativa, continua in $[a,b)$ e non limitata in un intorno sinistro di b.*

Definizione 7.23 *Integrale improprio in $(a,b]$ di una funzione f non negativa, continua in $(a,b]$ e non limitata in un intorno destro di a.*

Definizione 7.24 *Integrale improprio in $[a,+\infty)$ di una funzione continua e non negativa.*

Definizione 7.25 *Integrale improprio in $(-\infty, b]$ di una funzione continua e non negativa.*

Esercizio 7.26 *Studio dell'integrale improprio* $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$.

Esercizio 7.27 *Studio dell'integrale improprio* $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$.

Esercizio 7.28 *Studio dell'integrale improprio* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Esercizio 7.29 *Studio dell'integrale improprio* $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

Esercizio 7.30 *Calcolare i seguenti integrali impropri*
$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx, \quad b>0, \quad p>1, \quad p<1, \quad p=1$
$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$
$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx, \quad a>0, \quad p>1, \quad p<1, \quad p=1$
$\int_2^\infty \frac{1}{x\lg x}\,dx$
$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx, \quad \alpha>0$

Esercizio 7.31 *Calcolare i seguenti integrali*
$\int \frac{2x}{(x+2)^2}\,dx$
$\int 2x\arctan x\,dx$
$\int \cos(2\ln x)\,\frac{1}{x}dx$
$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$
$\int_1^2 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}-1}\,dx$
$\int_0^2 \frac{e^x\ln(e^x+1)}{e^x+1}\,dx$
$\int_0^1 x(e^{1+x^2}+\frac{x}{x^3+1})\,dx$
$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\,dx.$

Esercizio 7.32 *Calcolare i seguenti integrali*

1. $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$
2. $\int x\ln^2 x\,dx$
3. $\int_2^3 \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx$
4. $\int x^2\sin x\,dx$
5. $\int_0^1 \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$
6. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$
7. $\int_{-2}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2}\,dx$
8. $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{1+\ln(cosx)}\,dx$
9. $\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$
10. *Sia f'' continua in $[0,1]$ e tale che $f(0)=f(1)=e$, $f'(1)=\pi$, allora quanto vale $\int_0^1 xf''\,dx$?*

Esercizio 7.33 *Calcolare massimi e minimi locali di* $F(x)=\int_0^{x^2} \frac{e^t(2t-t^2)}{\pi-\arctan x}\,dx$.

8 SERIE

Introduzione.

Definizione 8.1 *Serie. Somma ridotta parziale di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Somma di una serie.*

Esercizio 8.2 *Studio del carattere della serie* $\sum_{k=1}^{\infty} k$.

Esercizio 8.3 *Studio del carattere della serie geometrica* $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$.

Esercizio 8.4 *Studio del carattere della serie (di Mengoli)* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1}$. .

Esercizio 8.5 *Studio del carattere della serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$.

Le serie telescopiche

Esercizio 8.6 *Studio del carattere della serie armonica generalizzata* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Teorema 8.7 *Condizione necessaria per la convergenza di una serie. (dim)*

Osservazione 8.8 *Non è condizione sufficiente.*
Esempio: la serie armonica.
Esempio: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Serie a termini non negativi

Teorema 8.9 *Una serie a termini non negativi è sempre convergente o divergente. Converge se e solo se la somma delle ridotte n-esime è limitata superiormente. (dim)*

Criteri per la convergenza delle serie a termini non negativi

Teorema 8.10 *Criterio del confronto. (dim)*

Teorema 8.11 *Criterio degli infinitesimi.*

Teorema 8.12 *Criterio del rapporto.*

Teorema 8.13 *Criterio della radice.*

Teorema 8.14 *Criterio della confronto asintotico.*

Serie a termini di segno alterno.

Teorema 8.15 *Criterio di convergenza per le serie alternate (Criterio di Leibniz).*

Serie a termini di segno qualsiasi.

Definizione 8.16 *Convergenza assoluta di una serie.*

Teorema 8.17 *Se una serie converge assolutamente, allora converge. (dim)*

Osservazione 8.18 *Il viceversa non è vero. Esempio:* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$.

La serie di Taylor.

Definizione 8.19 *La serie di Taylor.*

Teorema 8.20 *Teorema di sviluppabilità in serie di Taylor.*

Esercizio 8.21 *Applicazione del teorema alle funzioni elementari.*

Esercizio 8.22 *Studiare la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie*

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k$

$\sum_{k=1}^{\infty}(2-k)$

$\sum_{k=1}^{\infty} k^2$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(e^{\frac{2}{k}} - e^{\frac{1}{k}})$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^2+5}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{5}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2^k}{k^2+3^k}$

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n+1}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{k^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k+7}$

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty}[(-\frac{1}{3})^k + \frac{3}{\sqrt{k}}]$

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\log k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^3}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+7}{k^2+3}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}-1}{\sqrt{k}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+7}{k^4+3}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^3+k^2+4}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+4^n}{\ln k+5^k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{\sqrt{k}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{k} - \sin\frac{1}{k})$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k})$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\sin k)}{k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} (\sin(\cos k))^k$

Esercizio 8.23 *Studiare il carattere delle serie con termine generico a_n dove $a_n = \frac{1}{n}$ per $n \leq 100$ e $a_n = \frac{1}{n^2}$ per $n > 100$*

Esercizio 8.24 *Discutere la convergenza assoluta e semplice al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n^{4\alpha}+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|e^{\alpha^2-3}|^n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha-2|^{n+1}}{2n^2}$$