Sapienza Università di Roma

Fondamenti di fisica generale - VI Lezione

Forza elastica e oscillazioni

Andrea Bettucci

29 novembre 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

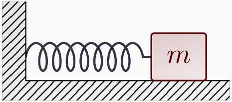
I parte

La forza elastica

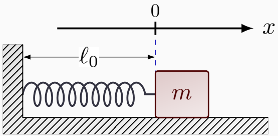
- Le forze elastiche hanno origine nella deformazione dei corpi finché tali deformazioni sono piccole.
- I corpi sottoposti ad azioni che tendono a variare il loro assetto di riposo e si deformano.
- Le deformazioni producono delle forze dirette come le azioni esterne ma in verso opposto.
- Entro certi limiti (elastici) le intensità di queste forze (elastiche) sono proporzionali alle deformazioni.

- Le **forze elastiche** hanno origine nella deformazione dei corpi finché tali deformazioni sono piccole.
- I corpi sottoposti ad azioni che tendono a variare il loro assetto di riposo e si deformano.
- Le deformazioni producono delle forze dirette come le azioni esterne ma in verso opposto.
- Entro certi limiti (elastici) **le intensità di queste forze (elastiche) sono proporzionali alle deformazioni.**

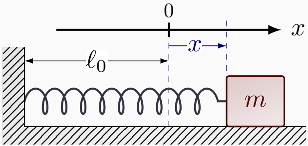
Si consideri, ad esempio, una massa m attaccata all'estremità di una molla a spirale disposta orizzontalmente. Considereremo solo molle ideali, ovvero molle aventi massa trascurabile.



La molla è un corpo elastico e sia ℓ_0 la sua lunghezza in assetto di riposo. un asse delle x è disposto assialmente alla molla con l'origine O tale che sia nulla l'ascissa del punto di attacco tra molla e massa.

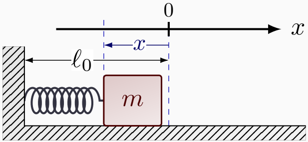


La molla viene deformata assialmente spostando orizzontalmente la massa; sia x l'allungamento della molla ($x > 0$ se la deformazione è un'estensione; $x < 0$ se la deformazione è una compressione).



Estensione della molla

$x > 0$



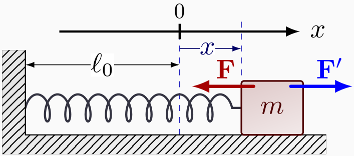
Compressione della molla

$x < 0$

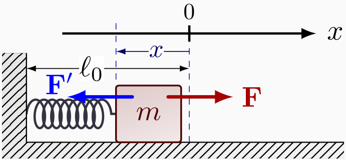
- Deformando la molla con una forza $\mathbf{F}'$, la forza $\mathbf{F}$ che la molla esercita sulla massa è diretta lungo x tale da riportare m nella posizione O di riposo.
- Se x è piccolo, $\mathbf{F}$ ha intensità proporzionale a x.
- La forza elastica ha espressione:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} \qquad \text{Legge di Hooke}$$

con $k > 0$ costante elastica della molla e $\mathbf{i}$ versore dell'asse x.



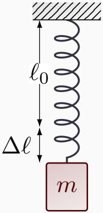
$F_x = -kx$ è negativa poiché x è positivo



$F_x = -kx$ è positiva poiché x è negativo

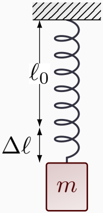
Esercizio

Una molla avente costante elastica $k = 300\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 80\,\mathrm{cm}$ è attaccata con un'estremità al soffitto di una parete mentre l'altra estremità è attaccata a una massa $m = 4\,\mathrm{kg}$. Quale sarà l'allungamento $\Delta\ell$ della molla?



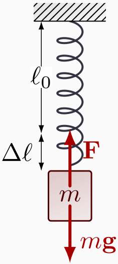
Esercizio

Una molla avente costante elastica $k = 300\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 80\,\mathrm{cm}$ è attaccata con un'estremità al soffitto di una parete mentre l'altra estremità è attaccata a una massa $m = 4\,\mathrm{kg}$. Quale sarà l'allungamento $\Delta\ell$ della molla?



Nella posizione di equilibrio della massa m, deve essere nullo il risultante delle forze su di essa agenti, cioè l'intensità della forza peso e della forza elastica deve essere uguale:

$$mg = k\Delta\ell \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k}.$$

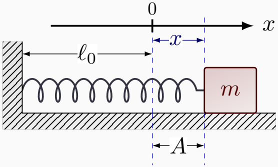


Sostituendo i valori numerici si trova:

$$\Delta\ell = \frac{(4\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{300\,\mathrm{N/m}} = 0{,}13\,\mathrm{m}.$$

Oscillazioni libere

Se si rimuove la forza esterna $\mathbf{F}'$ che ha deformato la molla, la massa m comincia a muoversi sotto l'azione della sola forza elastica $\mathbf{F}$.



Applicando la seconda legge della dinamica alla massa m e proiettandola lungo l'asse x si ottiene:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{1}$$

La massa m si muove lungo l'asse x di moto armonico; infatti la legge oraria del moto (la soluzione dell'Eq. (1)) è

$$x(t) = A\cos\omega_0 t$$

dove l'ampiezza A è pari allo spostamento iniziale della massa m.

Proviamo che il moto è armonico, ovvero che $x(t) = A\cos\omega_0 t$ è soluzione della seconda equazione della dinamica. Infatti si ha

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t.$$

Sostituendo nella seconda equazione della dinamica

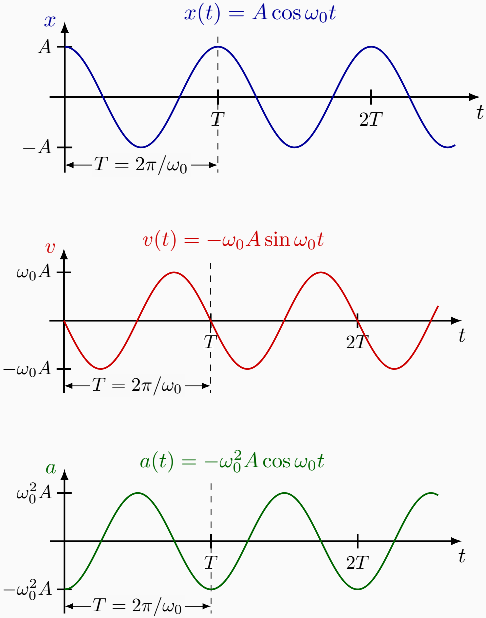
$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

si ottiene

$$-k(A\cos\omega_0 t) = m(-A\omega_0^2 \cos\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il moto è armonico con un periodo e una frequenza dati da:

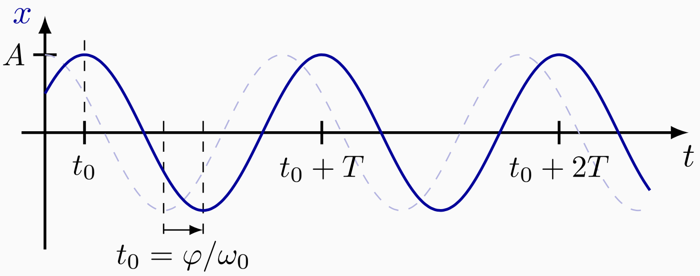
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

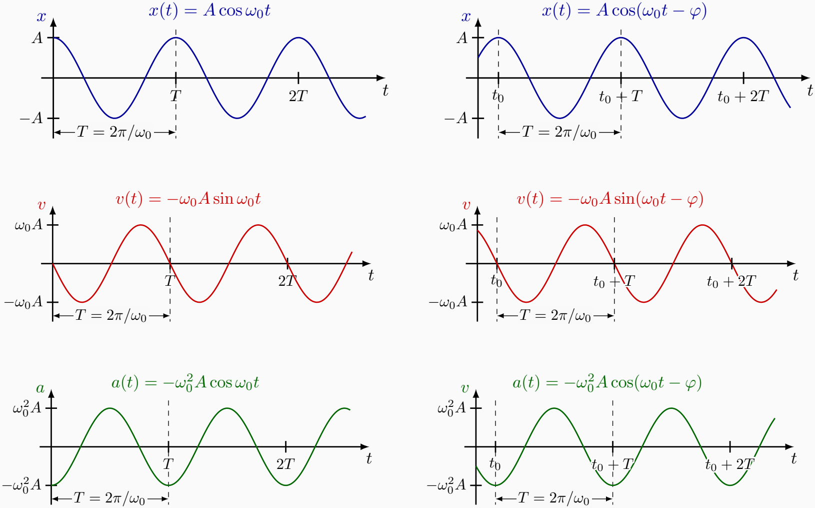

$x(t) = A\cos\omega_0 t$
x
A
$-A$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega_0$
$v(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t$
v
$\omega_0 A$
$-\omega_0 A$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega_0$
$a(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t$
a
$\omega_0^2 A$
$-\omega_0^2 A$
T
$2T$
t
$T = 2\pi/\omega_0$

- Non è detto che all'istante $t = 0$ la massa si trovi in A con velocità nulla.
- In generale sarà (**riguardate la lezione sul moto armonico!**):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t \pm \varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) = A\cos\omega_0(t - \tfrac{\varphi}{\omega_0})$$




x(t) = A cos ω0t
x(t) = A cos(ω0t − φ)
v(t) = −ω0A sin ω0t
v(t) = −ω0A sin(ω0t − φ)
a(t) = −ω0²A cos ω0t
a(t) = −ω0²A cos(ω0t − φ)
x
v
a
A
−A
ω0A
−ω0A
ω0²A
−ω0²A
t
T
2T
t0
t0 + T
t0 + 2T
T = 2π/ω0

Esercizio

Una massa si muove lungo l'asse x con la seguente legge oraria:

$$x(t) = 0{,}3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

dove x è espresso in metri e t in secondi. *(a)* Qual è la frequenza, il periodo, l'ampiezza, la pulsazione e la fase del moto? *(b)* Qual è la posizione della massa nell'istante $t = 1\,\mathrm{s}$? *(c)* Qual è la velocità e l'accelerazione della massa? *(d)*. Si determinino la posizione e la velocità iniziale della massa.

(a) Confrontando la legge oraria data con l'espressione generale di un moto armonico $x(t) = A\cos(\omega_0 t \pm \varphi)$ si ha:

- pulsazione: $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$
- ampiezza: $A = 0{,}3\,\mathrm{m}$
- fase del moto: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

(b) Nell'istante $t = 1\,\mathrm{s}$ la posizione della massa è:

$$x(t) = 0{,}3\cos\left[2(1) + \frac{\pi}{6}\right] = -0{,}245\,\mathrm{m}.$$

(c) La velocità della massa è:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0{,}3\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\frac{d}{dt}(2t) = -0{,}6\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

mentre l'accelerazione è:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0{,}3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\frac{d}{dt}(2t) = -1{,}3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

(d) La posizione iniziale della massa è:

$$x_0 = x(t=0) = 0{,}3\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}260\,\mathrm{m}$$

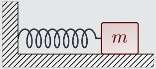
mentre la velocità iniziale è:

$$v_0 = v(t=0) = -0{,}6\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}300\,\mathrm{m/s}.$$

II parte

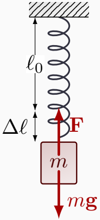
Esercizio

Una molla si allunga di $\Delta\ell = 10\,\text{cm}$ quando viene appesa con un estremo attaccato al soffitto mentre all'altro porta agganciata una massa $m = 2\,\text{kg}$. Successivamente la molla e la massa sono disposte orizzontalmente come mostrato nella figura. Quali saranno l'ampiezza di oscillazione A, la pulsazione ω_0, la frequenza ν e il periodo del moto T della massa m se all'istante $t = 0$ essa viene spostata di $x_0 = 5\,\text{cm}$ dalla posizione di equilibrio e rilasciata con velocità nulla? (Si supponga privo di attrito il piano orizzontale.)



Quando la molla è disposta verticalmente, l'equilibrio della massa m richiede che:

$$mg = k\Delta\ell \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta\ell} = 196\,\text{N/m}.$$



Nella posizione orizzontale poiché all'istante $t = 0$ la massa m viene spostata di $x_0 = 5\,\text{cm}$ dalla posizione di equilibrio e rilasciata con velocità nulla, la legge oraria del moto, supponendo x l'asse orizzontale, è data da:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t$$

con $A = 5\,\text{cm}$, mentre la pulsazione è:

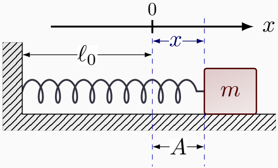
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 9{,}90\,\text{rad/s}.$$

La frequenza ν e il periodo del moto T sono dati rispettivamente da:

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1{,}58\,\text{Hz} \qquad\qquad T = \frac{1}{\nu} = 0{,}63\,\text{s}.$$

Oscillazioni smorzate

Si supponga che il sistema massa-molla sia immerso in un fluido (liquido o gas).



- Durante il moto ($v \neq 0$) di un corpo in un fluido si presentano forze dette **resistenze passive** che sono opposte alla velocità: tali forze si oppongono al moto.
- Per basse velocità (regime viscoso) la resistenza passiva risulta proporzionale alla velocità:

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$$

dove il coefficiente b dipende dalla natura del mezzo, dalle dimensioni e dalla geometria del corpo.

In tal caso il secondo principio della dinamica per la massa m assume la seguente forma:

$$-b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Nel caso di piccoli coefficienti di smorzamento b $(b^2 < 4mk)$ la soluzione dell'equazione è

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_0' t + \varphi)$$

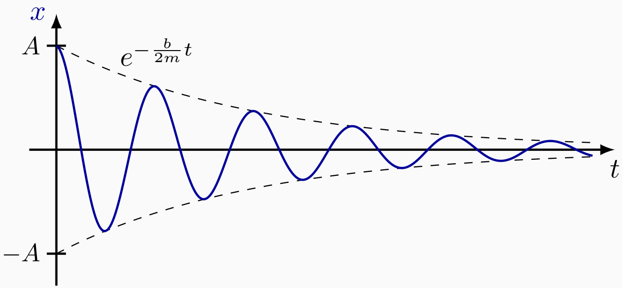
con

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

dove l'elongazione iniziale A e l'angolo di fase iniziale φ sono stabiliti in base alle condizioni iniziali.

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_0' t + \varphi)$$

La massa oscilla attorno alla posizione di riposo ($x = 0$), ma le deviazioni massime di ciascuna oscillazione si vanno attenuando con legge esponenziale: si è in presenza di oscillazioni smorzate.

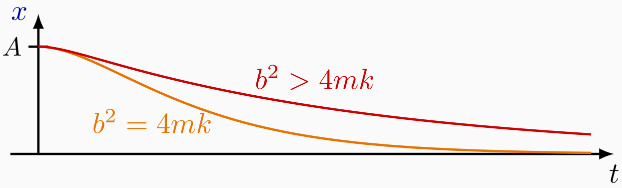


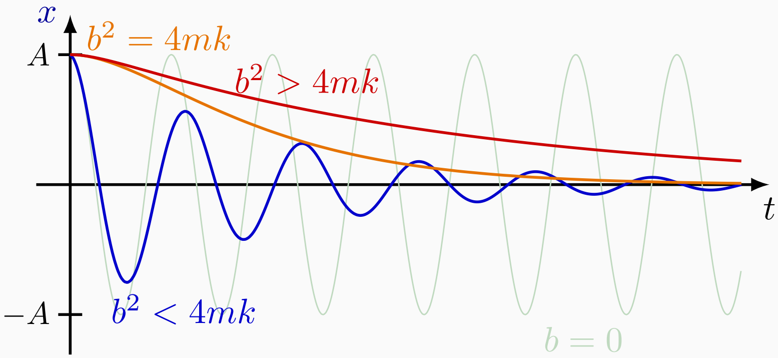
Se la viscosità del mezzo cresce ($b^2 \geq 4mk$) il moto non è più oscillatorio, ma decresce esponenzialmente a partire dal valore di ampiezza iniziale $x = A$ fino alla posizione di riposo $x = 0$.

Si presentano due casi:

Oscillatore sovrasmorzato $b^2 > 4mk$
: È la condizione che si verifica quando il sistema è immerso in un mezzo denso e viscoso come un olio.

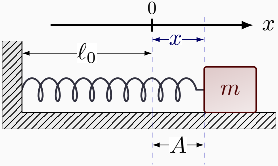
Smorzamento critico $b^2 = 4mk$.
: È la condizione per la quale la massa m raggiunge più rapidamente la posizione di equilibrio ($x = 0$) senza oscillare.




x
$b^2 = 4mk$
A
$b^2 > 4mk$
t
$-A$
$b^2 < 4mk$
$b = 0$

Oscillazioni forzate. Risonanza

Si supponga che il sistema massa-molla oltre a essere immerso in un fluido che esercita una forza di resistenza passiva proporzionale alla velocità sia soggetto a una forza nella direzione x che varia sinusoidalmente nel tempo. Il II principio della dinamica si scriverà:

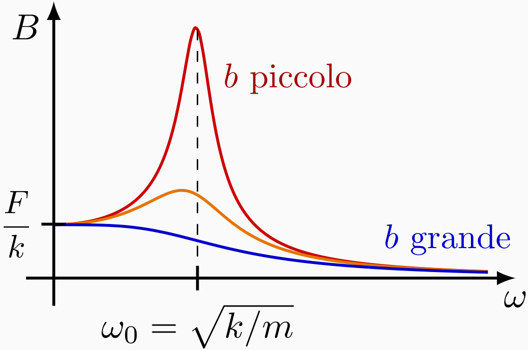


$$-b\frac{dx}{dt} - kx + F\cos\omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Considerando tempi lunghi (*condizione di regime*) il moto della massa m è oscillatorio con una pulsazione eguale a quella della forza esterna e con un'ampiezza proporzionale alla forza F

$$x(t) = BF\cos(\omega t - \varphi)$$

dove sia B che φ dipendono da ω.



- Il presentarsi di un massimo nell'ampiezza di oscillazione che, secondo i valori di b, può essere varie volte maggiore di F/k costituisce il fenomeno della risonanza meccanica.
- Fenomeni di risonanza si hanno anche in altri sistemi capaci di oscillare, quali circuiti elettrici, sistemi atomici, ecc., se vengono forzati armonicamente.

RISONANZA MAGNETICA NUCLEARE