Complementi di Fisica - VII Lezione

Soluzione degli esercizi 1, 4, 7, 8, 9 e 10 della IV prova di autovalutazione

Condensatori (I parte)

Andrea Bettucci

2 aprile 2025

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Esercizio 1

Qual è il minimo lavoro che una forza esterna deve fare per portare una carica $q = 3{,}00\,\mu\text{C}$ dall'infinito fino a una distanza $d = 0{,}5\,\text{m}$ da una carica $Q = 20{,}0\,\mu\text{C}$?

Esercizio 1

Qual è il minimo lavoro che una forza esterna deve fare per portare una carica $q = 3{,}00\,\mu\text{C}$ dall'infinito fino a una distanza $d = 0{,}5\,\text{m}$ da una carica $Q = 20{,}0\,\mu\text{C}$?

- Il lavoro minimo $L_{\min}$ è quello fatto da una forza esterna che, istante per istante, ha lo stesso modulo, ma verso opposto, della forza di Coulomb che tende a respingere le due cariche l'una dall'altra.
- Di conseguenza, il lavoro minimo della forza esterna sarà uguale e contrario a quello compiuto dalla forza di Coulomb quando la carica q viene portata dall'infinito fino alla distanza d da Q.
- Il lavoro della forza di Coulomb L_C è uguale variazione cambiata di segno dell'energia potenziale della carica q.

$$L_C = -\Delta U = U_{\text{iniz}} - U_{\text{fin}} = q[V(\infty) - V(d)] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$L_C \simeq -(3 \times 10^{-6}\,\mathsf{C})\frac{(9 \times 10^9\,\mathsf{N \cdot m^2/C^2})(2 \times 10^{-5}\,\mathsf{C})}{0{,}5\,\mathsf{m}} \simeq -1{,}08\,\mathsf{J}$$

In conclusione, è stato determinato il lavoro minimo.

$$L_{\min} = -L_C = 1{,}08\,\mathsf{J}.$$

Esercizio 4

Si determini il potenziale di una distribuzione piana di carica positiva infinitamente estesa con densità di carica σ. Si verifichi la congruità del risultato con l'andamento del campo elettrico creato dalla distribuzione di carica.

Esercizio 4

Si determini il potenziale di una distribuzione piana di carica positiva infinitamente estesa con densità di carica σ. Si verifichi la congruità del risultato con l'andamento del campo elettrico creato dalla distribuzione di carica.

Il potenziale in un generico punto b si determina a partire dalla conoscenza del campo elettrico $\mathbf{E}$ secondo la relazione

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \quad \Rightarrow \quad V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} + V_a$$

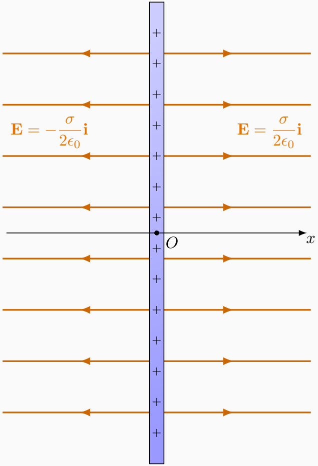
dove, di solito, è possibile porre uguale a zero il potenziale nel punto a arbitrariamente scelto.

Per una distribuzione di carica piana, uniforme e infinitamente estesa con densità di carica σ, il campo elettrico è uniforme, perpendicolare al piano della distribuzione (direzione x nella figura) e ha modulo

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Si può quindi esprimere il campo elettrico come:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{i}, & x > 0; \\ \mathbf{E} = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{i}, & x < 0. \end{cases}$$



(*a*) potenziale in un generico punto b di ascissa positiva $(x > 0)$

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} + V_a \quad \Rightarrow \quad V(x) = -\int_{x_a}^{x} E dx + V_a = -E(x - x_a) + V_a$$

che, scegliendo il punto a nell'origine dell'asse x si semplifica in

$$V(x) = -Ex + V_a$$

(*b*) potenziale in un generico punto b di ascissa negativa $(x < 0)$

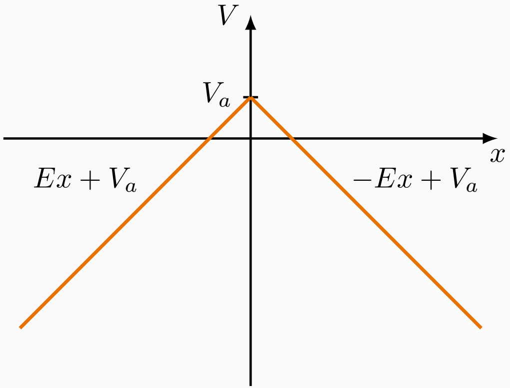
$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} + V_a \quad \Rightarrow \quad V(x) = \int_{x_a}^{x} E dx + V_a = E(x - x_a) + V_a$$

che, scegliendo il punto a nell'origine dell'asse x si semplifica in

$$V(x) = Ex + V_a$$

In conclusione, il potenziale è stato determinato.

$$\begin{cases} V(x) = -Ex + V_a, & x > 0; \\ V(x) = Ex + V_a, & x < 0. \end{cases}$$

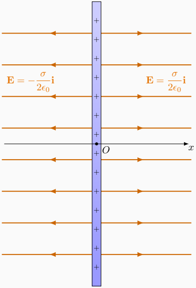


$$\begin{cases} V(x) = -Ex + V_a, & x > 0; \\ V(x) = Ex + V_a, & x < 0. \end{cases}$$

Dato il potenziale V le componenti del campo elettrico sono date da:

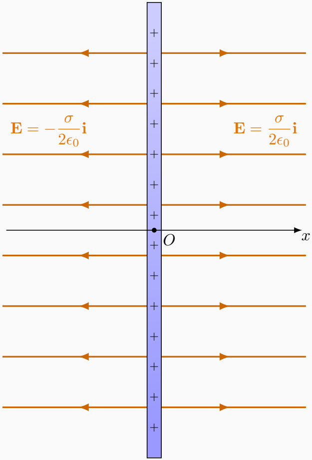
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Poiché il potenziale trovato dipende solo da x, il campo elettrico ha solo la componente lungo l'asse x.



$$\begin{cases} V(x) = -Ex + V_a, & x > 0; \\ V(x) = Ex + V_a, & x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = E = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & x > 0; \\ E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -E = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & x < 0; \end{cases}$$



Esercizio 7

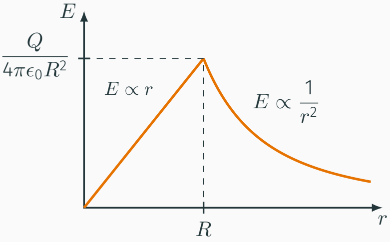
Una sfera non conduttrice di raggio r_0 porta una carica Q uniformemente distribuita in tutto il suo volume. Si determini il potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera considerando nullo il potenziale all'infinito.

Esercizio 7

Una sfera non conduttrice di raggio r_0 porta una carica Q uniformemente distribuita in tutto il suo volume. Si determini il potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera considerando nullo il potenziale all'infinito.

Il campo elettrico è diretto radialmente e vale:

$$\begin{cases} E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R; \\[2ex] E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, & r \leq R. \end{cases}$$



$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} \quad \Rightarrow \quad V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} + V_a.$$

Il potenziale V_b in un generico punto b di un campo elettrico dipende dalla scelta arbitraria del potenziale nel punto di riferimento a.

Di solito (ma non sempre!) è possibile assume nullo il potenziale nel punto a.

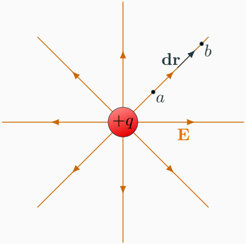
Potenziale in un punto

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} + V_a = \int_b^a \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} + V_a.$$

Il potenziale in un punto b è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene spostata dal punto in considerazione al punto di riferimento a dove il potenziale vale V_a

POTENZIALE DI UNA CARICA PUNTIFORME

Presi due punti a (di riferimento) e b a distanza r_a ed r_b dal centro della sfera



$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}$$

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right)$$

Se si pone a all'infinito ($r_a \to \infty$) con $V_a = 0$

$$V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Per $r \geq R$, poiché il campo elettrico è quello di una carica puntiforme, anche il potenziale sarà quello di una carica puntiforme (con a all'infinito e $V_a = 0$):

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

In particolare, sulla superfice della sfera il potenziale vale

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Per $r \leq R$

$$V_b - V_a = \int_{r_b}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{dr}$$

e quindi

$$V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_{r_b}^{r_a} r dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \left(r_a^2 - r_b^2\right)$$

Quindi $r \leq R$

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}\left(r_a^2 - r^2\right) + \text{cost.} \tag{1}$$

Ma il potenziale complessivo della mia sfera è definito a meno di UNA costante che però è già stata fissata al punto precedente avendo posto il potenziale nullo all'infinito; di conseguenza, QUESTA NUOVA COSTANTE DEVE ADATTARSI (ESSERE COERENTE) ALLA SCELTA FATTA IN PRECEDENZA!

E la scelta fatta in precedenza impone che sulla superficie della sfera

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

e, quindi dall'Eq.(1), per $r = R$ si deve avere

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}\left(r_a^2 - R^2\right) + \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \text{cost.} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r_a^2$$

Inserendo il calore della costante nell'Eq.(1) si ottiene l'espressione del potenziale.

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

e, ovviamente

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}!!$$

Esercizio 8

Quattro cariche puntiformi da $2\,\mu$C sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 4$ m. Supponendo nullo il potenziale all'infinito, si determini il potenziale al centro del quadrato se *(a)* tutte le cariche sono positive; *(b)* tre cariche sono positive e una negativa; *(c)* due cariche sono positive e due negative.

Esercizio 8

Quattro cariche puntiformi da $2\,\mu$C sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 4$ m. Supponendo nullo il potenziale all'infinito, si determini il potenziale al centro del quadrato se *(a)* tutte le cariche sono positive; *(b)* tre cariche sono positive e una negativa; *(c)* due cariche sono positive e due negative.

Le quattro cariche distano tutte la stessa distanza $r = 2\sqrt{2}$ m dal centro C del quadrato. Indicando con 1, 2, 3 e 4 le cariche ai quattro angoli del quadrato, poiché il potenziale al centro del quadrato è la somma algebrica dei potenziali dovuti alle quattro cariche, si scriverà:

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

Esercizio 8

Quattro cariche puntiformi da $2\,\mu$C sono poste ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 4$ m. Supponendo nullo il potenziale all'infinito, si determini il potenziale al centro del quadrato se *(a)* tutte le cariche sono positive; *(b)* tre cariche sono positive e una negativa; *(c)* due cariche sono positive e due negative.

Le quattro cariche distano tutte la stessa distanza $r = 2\sqrt{2}$ m dal centro C del quadrato. Indicando con 1, 2, 3 e 4 le cariche ai quattro angoli del quadrato, poiché il potenziale al centro del quadrato è la somma algebrica dei potenziali dovuti alle quattro cariche, si scriverà:

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

(a) Se tutte le cariche sono positive, allora si ottiene

$$V(C) \simeq \frac{9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}}{2\sqrt{2}\,\mathrm{m}}(4)(2\,\mu\mathrm{C}) = 25{,}4\,\mathrm{kV}.$$

(b) Se tre cariche sono positive e una negativa, allora si ottiene

$$V(C) \simeq \frac{9 \times 10^9\,\mathsf{N \cdot m^2/C^2}}{2\sqrt{2}\,\mathsf{m}}(2)(2\,\mu\mathsf{C}) = 12{,}7\,\mathsf{kV}.$$

(b) Se tre cariche sono positive e una negativa, allora si ottiene

$$V(C) \simeq \frac{9 \times 10^9\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2}{2\sqrt{2}\,\mathrm{m}}(2)(2\,\mu\mathrm{C}) = 12{,}7\,\mathrm{kV}.$$

(c) Se due cariche sono positive e due negative, allora si ottiene

$$V(C) = 0.$$

Esercizio 9

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono separate da una distanza d. Si determini il rapporto q_1/q_2 sapendo che il potenziale è nullo in un punto a distanza $d' = d/3$ da q_1.

Esercizio 9

Due cariche puntiformi q_1 e q_2 sono separate da una distanza d. Si determini il rapporto q_1/q_2 sapendo che il potenziale è nullo in un punto a distanza $d' = d/3$ da q_1.

Nel punto P a distanza $d' = d/3$ da q_1, e quindi a distanza $d'' = 2/3d$ da q_2, si sommano i potenziali creati dalle due cariche; di conseguenza, si può scrivere:

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d'} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d''} = 0.$$

Sostituendo i valori di d' e di d'' si ottiene:

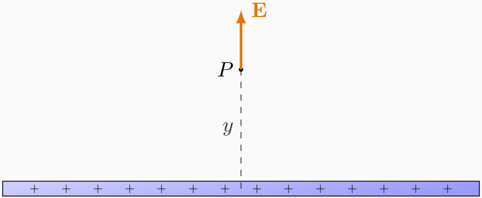
$$q_1 + \frac{q_2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{q_2} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 10

Si determini il potenziale generato da un sottile filo rettilineo infinitamente lungo carico positivamente con densità lineica di carica uniforme λ a partire dal campo elettrico da esso creato.

Esercizio 10

Si determini il potenziale generato da un sottile filo rettilineo infinitamente lungo carico positivamente con densità lineica di carica uniforme λ a partire dal campo elettrico da esso creato.



Il campo elettrico di un filo infinitamente lungo è in ogni punto a distanza y dal filo, perpendicolare al filo e di modulo $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 y$, quindi

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\mathbf{j}$$

Il potenziale in un generico punto b si determina a partire dalla conoscenza del campo elettrico $\mathbf{E}$ secondo la relazione

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} + V_a$$

dove, di solito, è possibile porre uguale a zero il potenziale nel punto a arbitrariamente scelto.
Poiché è $\mathbf{ds} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, si ha:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = (\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\mathbf{j}) \cdot (dy\mathbf{j}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}dy$$

allora

$$V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{y_a}^{y}\frac{dy}{y} + V_a \quad \Rightarrow \quad V(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{y_a}{y}$$

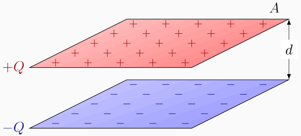
avendo posto uguale a zero il potenziale nel punto a a distanza y_a dal filo (in questo caso non si può porre $V(\infty) = 0$!).

Condensatori (I parte)

Condensatore

Un condensatore è un dispositivo che serve a immagazzinare carica elettrica. È costituito da due conduttori (armature) non connessi elettricamente, posti uno vicino all'altro, ciascuno dei quali carico con eguale quantità di carica, ma di segno opposto.

Un semplice condensatore è costituito da una coppia di lastre metalliche parallele di area A separate da una piccola distanza d.



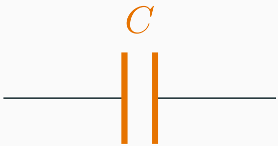
Spesso le lastre vengono arrotolate a formare un cilindro e fra esse, per garantire la separazione, viene posta della carta o altro materiale isolante.

Verranno qui considerati sempre condensatori nei quali vi è il vuoto o, equivalentemente, aria tra le armature.

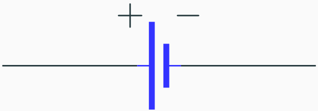
I condensatori vengono impiegati nei circuiti elettronici ad esempio per:

- Rilasciare al momento opportuno la carica elettrica immagazzinata (flash macchine fotografiche, defribillatori, ecc.).
- Proteggere dei circuiti elettrici dalle rapide variazione di carica ed energia.
- Memorizzare i valori di "0" e "1" in alcune memorie RAM dei computer.

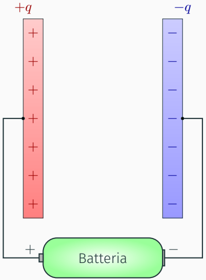
Simbolo del condensatore



Simbolo della batteria



Un condensatore può essere caricato collegando le armature ai poli di una batteria con due fili conduttori: la differenza di potenziale ΔV tra i poli della batteria è uguale a quella tra le armature del condensatore.



Circuito elettrico: un percorso chiuso formato da conduttori (fili) che collegano condensatori o altri dispositivi, nei quali la carica può muoversi, e che può includere una sorgente di tensione.

Capacità di un condensatore

Per un condensatore si verifica sperimentalmente che il rapporto tra la carica q presente sulle armature e la differenza di potenziale ΔV tra le armature è costante:

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

La costante C è detta **capacità di un condensatore**

- La capacità si misura in coulomb/volt: tale unità di misura si chiama **fardad** (simbolo **F**).
- L'unità farad è molto grande e spesso si usano i suoi sottomultipli: il microfarad ($1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F}$), il nanofarad. ($1\,\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F}$) e il picofarad ($1\,\text{pF} = 10^{-12}\,\text{F}$)
- La capacità di un condensatore non dipende né da q né da ΔV, ma dalle caratteristiche geometriche del condensatore e dal materiale posto tra le armature.

Esercizio

Si ricavi la capacità di un condensatore piano le cui armature hanno un'area A e sono distanti d.

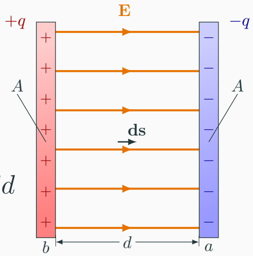
Esercizio

Si ricavi la capacità di un condensatore piano le cui armature hanno un'area A e sono distanti d.

Abbiamo visto $E = \sigma/\epsilon_0$, dove $\sigma = q/A$:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = \int_b^a \mathbf{E}\cdot\mathbf{ds} = E\int_b^a ds = Ed$$

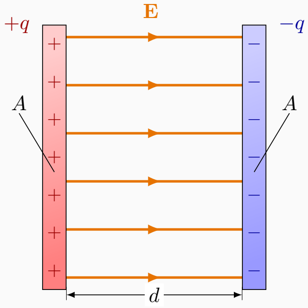


$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{q}{\epsilon_0 A} d$$

In conclusione, la capacità del condensatore piano è determinata

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

CONDENSATORE A FACCE PIANE E PARALLELE

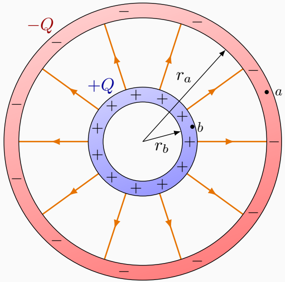


$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

La capacità di un condensatore non dipende né da q né da ΔV, ma dalle caratteristiche geometriche del condensatore e dal materiale posto tra le armature.

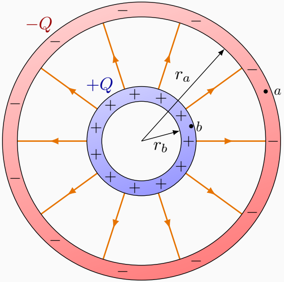
Esercizio

Un condensatore sferico è costituito da due gusci sferici conduttori e concentrici di raggi r_a ed r_b $(r_b < r_a)$. Sui gusci interno ed esterno è uniformemente distribuita una carica $+Q$ e $-Q$, rispettivamente. Si determini la capacità dal condensatore.



Esercizio

Un condensatore sferico è costituito da due gusci sferici conduttori e concentrici di raggi r_a ed r_b ($r_b < r_a$). Sui gusci interno ed esterno è uniformemente distribuita una carica $+Q$ e $-Q$, rispettivamente. Si determini la capacità dal condensatore.



Abbiamo visto (**V Lezione, Esercizio 3**) $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ $(r_b \leq r \leq r_a)$

$$V_b - V_a = \int_b^a \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} = \int_b^a E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right)$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_a - r_b}{r_a r_b} \right)$$

In conclusione, la capacità del condensatore sferico è determinata

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_a r_b}{r_a - r_b} \right)$$

Anche quest'esempio mostra che la capacità di un condensatore non dipende né da dalla carica né dalla differenza di potenziale tra le armature, ma dalle caratteristiche geometriche del condensatore e dal mezzo tra le armature.