

Complementi di Fisica - VII Lezione

Soluzione degli esercizi 3, 4, 5 e 8
della III prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

25 marzo 2024

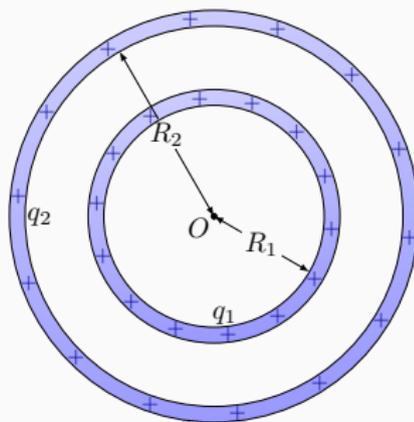
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Esercizio 3

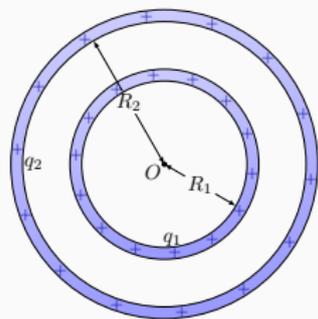
Su di un guscio sferico di raggio R_1 vi è una carica totale q_1 uniformemente distribuita sulla sua superficie. Un secondo, più grande guscio sferico di raggio R_2 concentrico al primo, porta una carica q_2 uniformemente distribuita sulla sua superficie. (a) Si usi la legge di Gauss per trovare il campo elettrico nelle regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$, essendo r la distanza da centro dei gusci sferici. (b) Quale dovrebbe essere il rapporto delle cariche q_1/q_2 e i loro relativi segni affinché il campo elettrico sia zero per $r > R_2$?

Esercizio 3

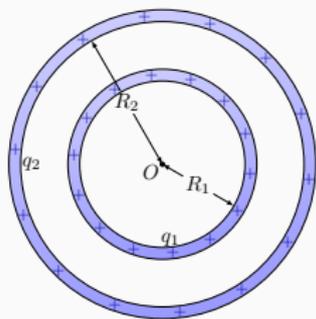
Su di un guscio sferico di raggio R_1 vi è una carica totale q_1 uniformemente distribuita sulla sua superficie. Un secondo, più grande guscio sferico di raggio R_2 concentrico al primo, porta una carica q_2 uniformemente distribuita sulla sua superficie. (a) Si usi la legge di Gauss per trovare il campo elettrico nelle regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$, essendo r la distanza da centro dei gusci sferici. (b) Quale dovrebbe essere il rapporto delle cariche q_1/q_2 e i loro relativi segni affinché il campo elettrico sia zero per $r > R_2$?



Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superficie di sfere centrate in O : come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r ($0 \leq r \leq \infty$) centrata in O .

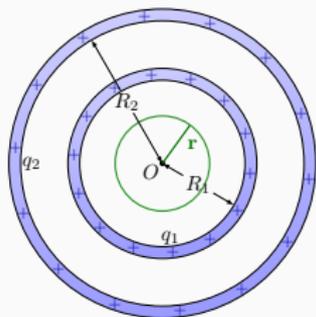


Poiché la distribuzione di carica ha simmetria sferica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente, con modulo costante sulla superficie di sfere centrate in O : come superficie gaussiana conviene scegliere una qualsiasi sfera di raggio r ($0 \leq r \leq \infty$) centrata in O .



a) Se $r < R_1$ non vi è carica elettrica all'interno della sfera, pertanto:

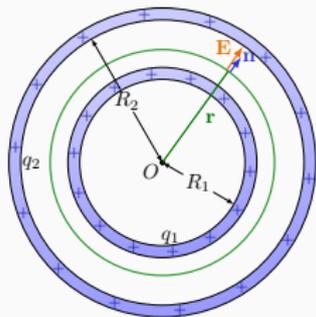
$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0.$$



Se $R_1 \leq r < R_2$, la carica elettrica all'interno della sfera è pari a q_1 e, data la simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico deve essere diretto radialmente con valore costante sulla superficie; quindi:

$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{q_1}{\epsilon_0}.$$

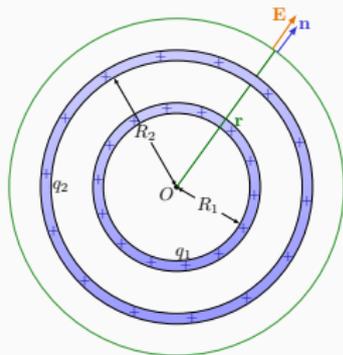
$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



Se $r \geq R_2$, la carica elettrica all'interno della sfera è pari a $q_1 + q_2$ e, sempre per la simmetria sferica della distribuzione di carica, il campo elettrico non può che essere diretto radialmente con valore costante sulla superficie; quindi:

$$\int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = E \int_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{(q_1 + q_2)}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



b) Se per $r > R_2$ il campo elettrico deve essere nullo, dalla relazione precedente deve essere

$$q_1 + q_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -q_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{q_2} = -1.$$

Esercizio 4

Vi è un campo elettrico

$\mathbf{E} = (200 \text{ N/C})\mathbf{i}$ nella regione $x > 0$ ed

$\mathbf{E} = (-200 \text{ N/C})\mathbf{i}$ nella la regione

$x < 0$. Una superficie immaginaria a

forma di cilindro retto di lunghezza

$\ell = 20 \text{ cm}$ e raggio $R = 5 \text{ cm}$ è

disposta con il suo asse lungo l'asse

x con una base nel punto di

coordinata $x = \ell/2$ e l'altra base nel

punto $x = -\ell/2$. (a) Determinare il

flusso netto del campo elettrico

attraverso l'intera superficie chiusa.

(b) Quanto vale la carica netta totale

all'interno della superficie chiusa?

Esercizio 4

Vi è un campo elettrico

$\mathbf{E} = (200 \text{ N/C})\mathbf{i}$ nella regione $x > 0$ ed

$\mathbf{E} = (-200 \text{ N/C})\mathbf{i}$ nella la regione

$x < 0$. Una superficie immaginaria a

forma di cilindro retto di lunghezza

$\ell = 20 \text{ cm}$ e raggio $R = 5 \text{ cm}$ è

disposta con il suo asse lungo l'asse

x con una base nel punto di

coordinata $x = \ell/2$ e l'altra base nel

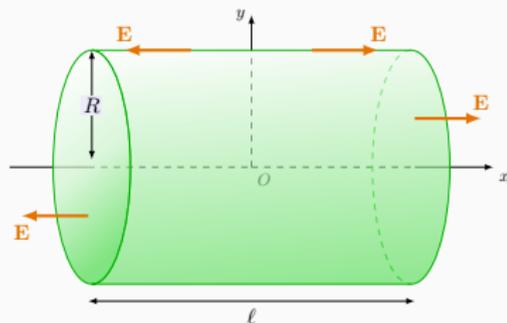
punto $x = -\ell/2$. (a) Determinare il

flusso netto del campo elettrico

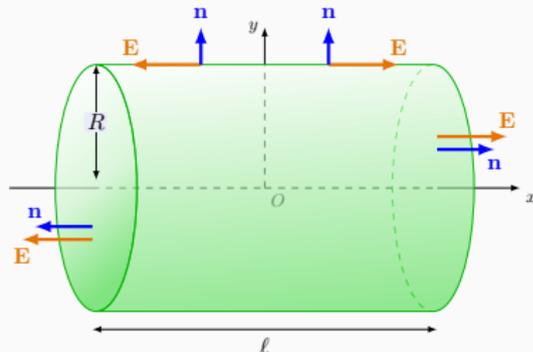
attraverso l'intera superficie chiusa.

(b) Quanto vale la carica netta totale

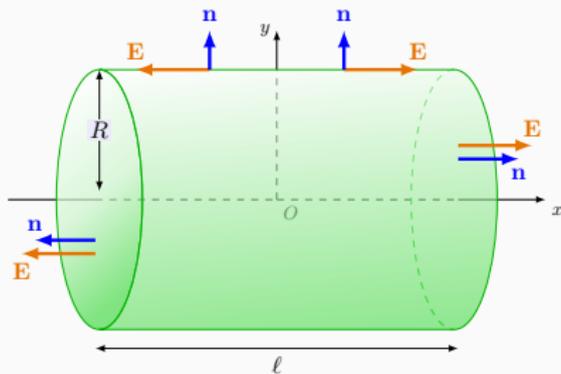
all'interno della superficie chiusa?



$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$



- Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa cilindrica è la somma di tutti i flussi (**con il loro segno!**) attraverso le superfici che compongono il cilindro.
- Data la direzione del versore normale alle superfici \mathbf{n} , è nullo il flusso netto del campo elettrico attraverso la superficie laterale del cilindro.
- Per la struttura del campo elettrico, il flusso attraverso le due superfici di base ha identico valore.

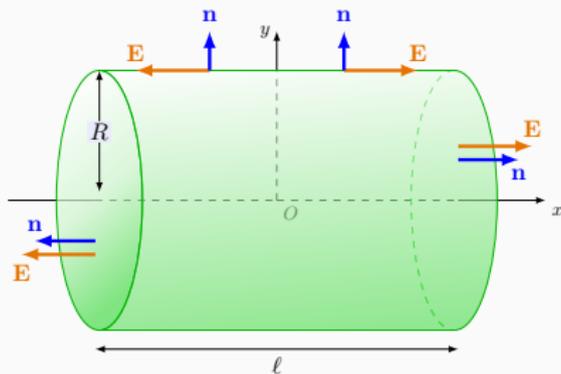


$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = \int_S \mathbf{E} dS = E(\pi R^2)$$

$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{netto}} = 2\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = 2E(\pi R^2) = 3,14 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

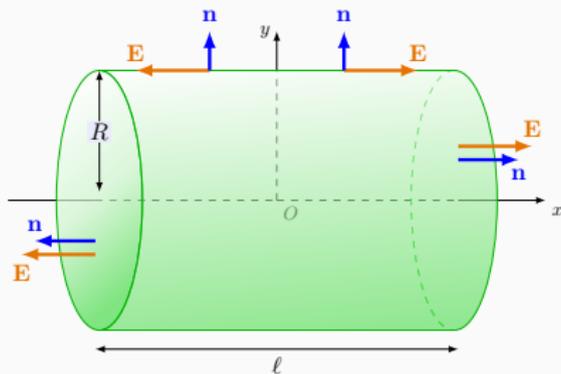
In conclusione, è noto il valore della carica elettrica all'interno del cilindro.

$$Q_{\text{int}} = \epsilon_0 \Phi(\mathbf{E})_{\text{totale}} = (8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(3,14 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}) = 27,8 \text{ pC}.$$



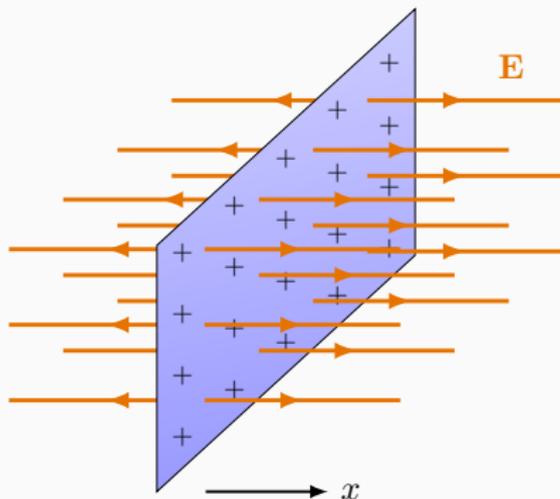
Due domandi interessanti

1. Perché la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro? Aumentando ℓ , ad esempio, aumenta il volume del cilindro e, di conseguenza dovrebbe aumentare la carica elettrica contenuta al suo interno!!
2. Perché, invece, la carica elettrica all'interno del cilindro dipende dal raggio R delle basi?

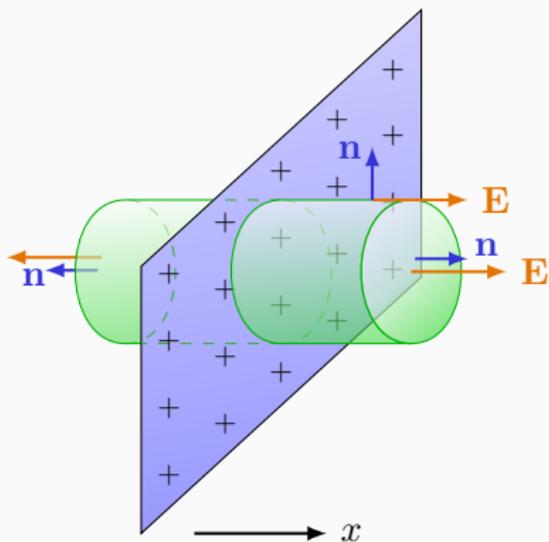


Due domande interessanti

1. Perché la carica elettrica all'interno del cilindro non dipende dalla lunghezza del cilindro? Aumentando ℓ , ad esempio, aumenta il volume del cilindro e, di conseguenza dovrebbe aumentare la carica elettrica contenuta al suo interno!!
2. Perché, invece, la carica elettrica all'interno del cilindro dipende dal raggio R delle basi?
3. **Con quale distribuzione di carica è possibile creare il campo elettrico dell'esercizio?**



Una distribuzione piana infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ genera un campo elettrico uniforme, di intensità $E = \sigma/2\epsilon_0$ perpendicolare al piano, diretto in versi opposti nei due semispazi individuati dal piano (**IV Lezione**).



È questo il motivo per il quale la carica elettrica all'interno del cilindro è indipendente dalla lunghezza del cilindro, ma è funzione del raggio R delle basi del cilindro!!

Esercizio 5

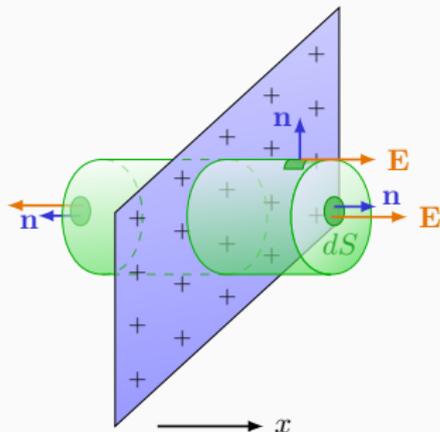
Utilizzando la legge di Gauss si determini il campo elettrico creato da una distribuzione uniforme piana di carica infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ .

Esercizio 5

Utilizzando la legge di Gauss si determini il campo elettrico creato da una distribuzione uniforme piana di carica infinitamente estesa con densità superficiale di carica σ .

- Data la distribuzione di carica, \mathbf{E} deve essere ad essa perpendicolare, con versi opposti nei due semispazi individuati dal piano.
- \mathbf{E} deve avere la stessa intensità in punti equidistanti dal piano.
- Il calcolo del flusso del campo elettrico diviene allora semplice se, come superficie chiusa, si sceglie un piccolo cilindro retto chiuso con asse perpendicolare alla distribuzione di cariche e basi, di raggio R , da essa equidistanti.

Per quanto è stato detto nell'esercizio precedente, il flusso del campo elettrico attraverso il cilindro così scelto si riduce al solo flusso attraverso le basi del cilindro.



$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = \int_S E dS = E(\pi R^2)$$

$$\Phi(\mathbf{E})_{\text{netto}} = 2\Phi(\mathbf{E})_{\text{base}} = 2E(\pi R^2).$$

La carica elettrica all'interno del cilindro è quella sulla superficie circolare intersezione tra il cilindro e il piano delle cariche:

$$Q_{\text{int}} = \sigma(\pi R^2).$$

In conclusione, dal teorema di Gauss si ottiene l'intensità di \mathbf{E} .

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E(\pi R^2) = \frac{\sigma(\pi R^2)}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Esercizio 8

In una sfera isolante di raggio R è distribuita una carica Q con densità dipendente dalla distanza r dal centro della sfera secondo la legge $\rho(r) = \alpha r^2$ con α costante. Supponendo noti i valori di R e Q , si determini la costante α e il campo elettrico in un generico punto P esterno alla sfera.

Poiché la densità della distribuzione di carica è funzione della distanza dal centro della sfera, la carica totale va espressa come

$$Q = \int_V \rho(r) dV$$

essendo l'integrale esteso a tutto il volume V della sfera.

Per una sfera di raggio r

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Di conseguenza,

$$Q = \int_0^R (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\alpha R^5$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{5}{4} \frac{Q}{\pi R^5}.$$

Di conseguenza,

$$Q = \int_0^R (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\alpha R^5$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{5}{4} \frac{Q}{\pi R^5}.$$

Per quanto riguarda il campo elettrico in un punto P al di fuori della sfera, per $r > R$ la distribuzione di carica, anche se di densità non costante, conserva la simmetria sferica poiché $\rho = \rho(r)$; di conseguenza, la distribuzione di carica dal punto di vista del campo elettrico creato in P equivale a una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera; pertanto si ha:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$