Sapienza Università di Roma

Fondamenti di fisica generale - VII Lezione

Soluzione degli esercizi della IV prova di autovalutazione. Nota sulla conservazione dell'energia.

Andrea Bettucci

4 dicembre 2023

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Soluzione degli esercizi della IV prova di autovalutazione

Esercizio 1

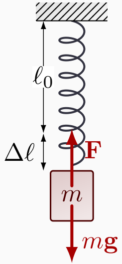
Una molla si allunga di $\Delta\ell = 4\,\mathrm{cm}$ quando viene appesa con un estremo attaccato al soffitto e all'altro estremo viene agganciata una massa $m = 50\,\mathrm{g}$. Se una massa complessiva $M = 150\,\mathrm{g}$ venisse appesa all'estremo libero della molla e venisse fatta oscillare verticalmente, quale sarebbe il periodo di oscillazione?

Esercizio 1

Una molla si allunga di $\Delta\ell = 4\,\text{cm}$ quando viene appesa con un estremo attaccato al soffitto e all'altro estremo viene agganciata una massa $m = 50\,\text{g}$. Se una massa complessiva $M = 150\,\text{g}$ venisse appesa all'estremo libero della molla e venisse fatta oscillare verticalmente, quale sarebbe il periodo di oscillazione?

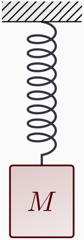
Nella condizione di equilibrio della massa m la forza elastica $\mathbf{F}$ esercitata dalla molla deve essere uguale e contraria alla forza peso $m\mathbf{g}$. Di conseguenza, le due forze devono essere eguali in modulo; si scriverà allora:

$$k\Delta\ell = mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta\ell} = 12{,}25\,\text{N/m}.$$

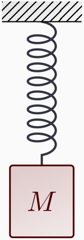


Quando la massa $M = 150\,\mathrm{g}$ è agganciata alla molla, oscillerà con un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}695\,\mathrm{s}.$$

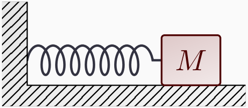


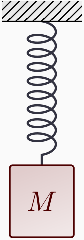
Quando la massa $M = 150\,\mathrm{g}$ è agganciata alla molla, oscillerà con un periodo



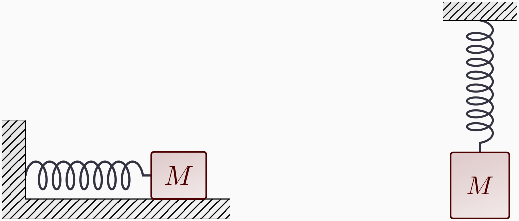
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}695\,\mathrm{s}.$$

Ma questi due sistemi sono equivalenti dal punto di vista delle caratteristiche del moto oscillatorio???





Un problema metodologico



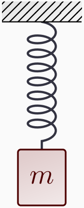
Se la massa M attaccata alla molla disposta orizzontalmente viene sposata di A dalla posizione di equilibrio, essa oscilla di moto armonico di ampiezza A e pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/M}$. Si può dire lo stesso per la medesima massa, attaccata alla stessa molla ma disposta verticalmente? Vedi esercizio $3\ldots$

Esercizio 2

Una molla di costante elastica k è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e l'altro estremo libero. Se all'estremo libero della molla viene agganciata una massa m e fatta oscillare verticalmente, si nota che il periodo del moto è T; mentre se una massa M viene aggiunta alla massa m, il periodo di oscillazione diviene $3T$. Si determini M in funzione di m.

Esercizio 2

Una molla di costante elastica k è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e l'altro estremo libero. Se all'estremo libero della molla viene agganciata una massa m e fatta oscillare verticalmente, si nota che il periodo del moto è T; mentre se una massa M viene aggiunta alla massa m, il periodo di oscillazione diviene $3T$. Si determini M in funzione di m.



Se ω_m e ω_{M+m} sono le pulsazioni del moto della massa m ed $M+m$, rispettivamente, si scriverà

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad 3T = \frac{2\pi}{\omega_{M+m}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Si ha perciò:

$$3\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{m} = \sqrt{M+m} \quad \Rightarrow \quad M = 8m.$$

Esercizio 3

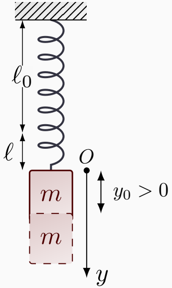
Una molla ideale di costante elastica k è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e si allunga di ℓ quando all'altro estremo viene agganciata una massa m. Successivamente, la massa viene tirata verso il basso di una quantità $y_0 > 0$ e rilasciata. Si determini il periodo di oscillazione della massa.

Esercizio 3

Una molla ideale di costante elastica k è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e si allunga di ℓ quando all'altro estremo viene agganciata una massa m. Successivamente, la massa viene tirata verso il basso di una quantità $y_0 > 0$ e rilasciata. Si determini il periodo di oscillazione della massa.

Nella posizione di equilibrio della massa (molla allungata di ℓ, massa alla quota $y = 0$), la forza peso è equilibrata dalla forza elastica; si scriverà quindi

$$mg = k\ell.$$

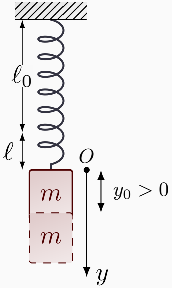


Quando la massa viene tirata verso il basso della quantità y_0 e rilasciata, l'equazione del moto della massa è:

$$mg - k[\ell + y(t)] = ma_y.$$

$$mg - k[\ell + y(t)] = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

La parentesi quadra rappresenta la deformazione complessiva della molla.



Si ha quindi

$$mg - k\ell - ky(t) = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Ma $mg = k\ell$ (vedi slide precedente), cosicché l'equazione del moto della massa m è:

$$-ky(t) = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

la cui soluzione è rappresentata da un moto armonico di ampiezza y_0 attorno alla posizione $y = 0$

Quindi la legge oraria del moto della massa m è:

$$y(t) = y_0 \cos \omega_0 t$$

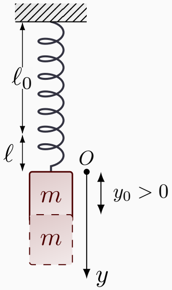
dove

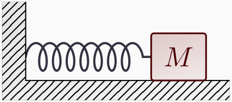
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

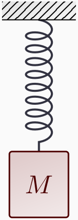
In conclusione, si ha:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

avendo tenuto presente che essendo $mg = k\ell$ allora $k = mg/\ell$.





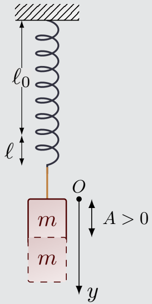


I due sistemi sono equivalenti dal punto di vista delle caratteristiche del moto oscillatorio.

Se la massa M attaccata alla molla disposta orizzontalmente viene sposata di A dalla posizione di equilibrio, essa oscilla di moto armonico di ampiezza A e pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/M}$. Lo stesso accade per la medesima massa, attaccata alla stessa molla ma disposta verticalmente: la massa oscillerà con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ attorno alla posizione di equilibrio, quella per la quale la forza peso è equilibrata dalla forza elastica.

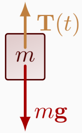
Esercizio 4

Una molla ideale di costante elastica k è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e all'altro estremo è agganciata una massa m tramite un filo inestensibile e privo di massa. Successivamente, la massa viene tirata verso il basso di una quantità A e rilasciata. (*a*) Assumendo che il filo rimanga sempre teso durante il moto qual è la massima accelerazione della massa? (*b*) Se il filo deve rimanere sempre teso durante il moto, qual è il massimo valore possibile di A? (*c*) Si determini il massimo valore di A se m = $0{,}10$ kg e k = 10 N/m.



(a) Dov'è che è massima l'accelerazione della massa?

In ogni istante del moto della massa m, le forze ad essa applicate sono la tensione del filo (che varia nel tempo!) e la forza peso.



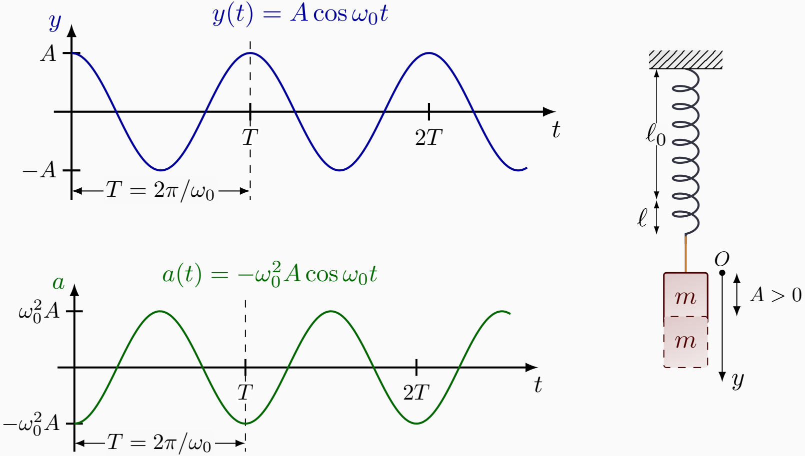
La forza elastica è applicata al filo non alla massa!

Se però il filo rimane sempre teso è come se la m fosse rigidamente attaccata alla molla, ovvero la tensione del filo è in ogni istante uguale alla forza elastica esercitata dalla molla.

Di conseguenza, il moto della massa è armonico con ampiezza A e pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ attorno alla quota $y = 0$

$$y(t) = A \cos \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad a(t) = -\omega_0^2 y(t).$$

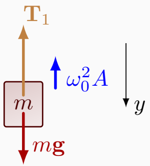
L'accelerazione ha il valore massimo pari in valore assoluto a $\omega_0^2 A$ quando lo spostamento è massimo: essa è diretta verso l'alto nel punto più basso della traiettoria ($y = +A$), ed è diretta verso il basso nel punto più elevato della traiettoria ($y = -A$).


$y(t) = A\cos\omega_0 t$
y
A
$-A$
t
T
$2T$
$T = 2\pi/\omega_0$
$a(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t$
a
$\omega_0^2 A$
$-\omega_0^2 A$
t
T
$2T$
$T = 2\pi/\omega_0$
ℓ_0
ℓ
O
m
m
$A > 0$
y

(b) La tensione della fune è massima nel punto più basso 1 della traiettoria ($y = +A$) e minima nel punto più alto 2 della traiettoria ($y = -A$)

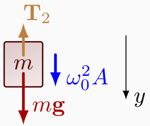
Infatti, nel punto 1 più basso della traiettoria si ha

$$mg - T_1 = -m\omega_0^2 A = -kA \quad \Rightarrow \quad T_1 = mg + kA$$



Mentre nel punto 2 più alto della traiettoria si ha

$$mg - T_2 = m\omega_0^2 A = kA \quad \Rightarrow \quad T_2 = mg - kA$$



Poiché la tensione di una fune non può essere negativa, si ha:

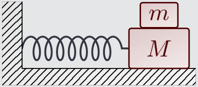
$$T_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad mg - kA \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{mg}{k}.$$

(c) Se m = 0,10 kg e k = 10 N/m si ha:

$$A \leq \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad A \leq \frac{(0{,}10\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})}{10\,\mathrm{N/m}} = 98\,\mathrm{mm}.$$

Esercizio 5

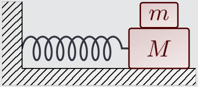
Un blocco di massa M può muoversi su un piano orizzontale liscio. Il blocco oscilla con frequenza ν essendo attaccato all'estremità di una molla disposta orizzontalmente il cui altro estremo è attaccato a una parete verticale.



A un dato istante, un blocco di massa $m < M$ viene piazzato sopra la massa M. È noto il coefficiente di attrito statico μ_s tra i due blocchi. Si determini la massima ampiezza delle oscillazioni che può avere il sistema dei due blocchi sovrapposti senza che vi sia scivolamento di m rispetto a M.

Esercizio 5

Un blocco di massa M può muoversi su un piano orizzontale liscio. Il blocco oscilla con frequenza ν essendo attaccato all'estremità di una molla disposta orizzontalmente il cui altro estremo è attaccato a una parete verticale.



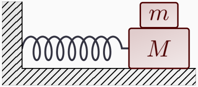
A un dato istante, un blocco di massa $m < M$ viene piazzato sopra la massa M. È noto il coefficiente di attrito statico μ_s tra i due blocchi. Si determini la massima ampiezza delle oscillazioni che può avere il sistema dei due blocchi sovrapposti senza che vi sia scivolamento di m rispetto a M.

La massa M quando si muove da sola di moto armonico a frequenza ν, subisce un'accelerazione massima nei punti di inversione del moto pari in valore assoluto a:

$$a_{\max} = \omega_0^2 A = 4\pi^2\nu^2 A$$

essendo A l'ampiezza di oscillazione.

Se la massa m non deve scivolare rispetto a M deve avere in ogni istante la stessa legge oraria del moto, ovvero la stessa accelerazione. Ma è l'attrito statico che *tiene ferma* la massa m rispetto alla massa M!



L'attrito statico è la forza che per un osservatore che guarda le due masse oscillare, fa muovere m.

Poiché $A_{\max} = \mu_s R_N = \mu_s m g$, allora per la seconda legge della dinamica applicata alla massa m deve essere

$$A_{\max} = m a_{\max} \quad \Rightarrow \quad \mu_s m g = m(4\pi^2\nu^2 A) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mu_s g}{4\pi^2\nu^2}.$$

Esercizio 6

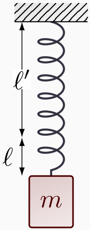
Una molla ideale di costante elastica $k = 800\,\mathrm{N/m}$ è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e all'altro estremo è agganciata una massa $m = 2\,\mathrm{kg}$. La massa viene tirata verso il basso di una quantità $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio e rilasciata. (a) Qual è l'ampiezza e la pulsazione del moto? (b) Qual è la velocità e l'accelerazione della massa m quando si trova a una distanza $\bar{\ell} = 12\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio?

Esercizio 6

Una molla ideale di costante elastica $k = 800\,\mathrm{N/m}$ è disposta verticalmente con un estremo attaccato al soffitto e all'altro estremo è agganciata una massa $m = 2\,\mathrm{kg}$. La massa viene tirata verso il basso di una quantità $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio e rilasciata. (a) Qual è l'ampiezza e la pulsazione del moto? (b) Qual è la velocità e l'accelerazione della massa m quando si trova a una distanza $\bar{\ell} = 12\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio?

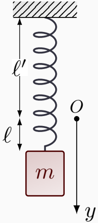
(a) Poiché La massa viene tirata verso il basso di una quantità $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio (molla lunga ℓ') e rilasciata, eseguirà un moto armonico di ampiezza ℓ. La pulsazione è

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,\mathrm{N/m}}{2\,\mathrm{kg}}} = 20\,\mathrm{rad/s}.$$



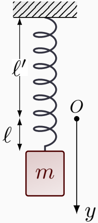
(b) Poiché il moto della massa m è armonico, l'accelerazione è legata allo spostamento $y(t) = \ell \cos \omega_0 t$ dalla relazione

$$a(t) = -\omega_0^2 \ell \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 y(t).$$



Quindi per uno spostamento $\bar{\ell} = 12\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio $a(\bar{\ell}) = -48\,\mathrm{m/s^2}$ diretta verso l'alto; per uno spostamento $\bar{\ell} = -12\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio $a(\bar{\ell}) = 48\,\mathrm{m/s^2}$ diretta verso il basso.

(*b*) Poiché il moto della massa m è armonico, l'accelerazione è legata allo spostamento $y(t) = \ell \cos \omega_0 t$ dalla relazione



$$a(t) = -\omega_0^2 \ell \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 y(t).$$

Quindi per uno spostamento $\bar{\ell} = 12\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio $a(\bar{\ell}) = -48\,\mathrm{m/s^2}$ diretta verso l'alto; per uno spostamento $\bar{\ell} = -12\,\mathrm{cm}$ dalla posizione di equilibrio $a(\bar{\ell}) = 48\,\mathrm{m/s^2}$ diretta verso il basso.

La velocità della massa è:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -\omega_0 \ell \sin \omega_0 t.$$

D'altra parte è:

$$\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \omega_0 t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \omega_0 t}.$$

Ma:

$$y(t) = \ell \cos \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \cos \omega_0 t = \frac{y(t)}{\ell}$$

e, di conseguenza si ha:

$$\sin \omega_0 t = \pm \sqrt{1 - \frac{y(t)^2}{\ell^2}}.$$

Si ottiene:

$$v(t) = -\omega_0 \ell \sin \omega_0 t = \pm \omega_0 \ell \sqrt{1 - \frac{y(t)^2}{\ell^2}} = \pm \omega_0 \sqrt{\ell^2 - y(t)^2}.$$

Se $\bar{t}$ è l'istante nel quale la massa si è spostata di $\bar{\ell} = 12\,\text{cm}$ dalla posizione di equilibrio, allora deve essere

$$v(\bar{t}) = \pm \omega_0 \sqrt{\ell^2 - \bar{\ell}^2} = \pm 3{,}2\,\text{m/s}.$$

Il segno positivo corrisponde alla massa che si sta muovendo verso il basso; quello negativo al movimento della massa verso l'alto.

Esercizio 7

In quale istante il blocco dell'esercizio precedente raggiunge il punto distante $d = 10\,\text{cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio?

Esercizio 7

In quale istante il blocco dell'esercizio precedente raggiunge il punto distante $d = 10\,\mathrm{cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio?

Sappiamo che il moto della massa è dato dalla legge

$$y(t) = \ell \cos \omega_0 t.$$

Se $t^\star$ è l'istante in cui la massa raggiunge il punto distante $d = 10\,\mathrm{cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio, deve essere

$$y(t^\star) = d \quad \Rightarrow \quad d = \ell \cos \omega_0 t^\star \quad \Rightarrow \quad 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}2\,\mathrm{m} \cos\left[(20\,\mathrm{rad/s})t^\star\right]$$

da cui si ha

$$\cos\left[(20\,\mathrm{rad/s})t^\star\right] = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (20\,\mathrm{rad/s})t^\star = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t^\star = \frac{\pi}{60}\,\mathrm{s}.$$

Esercizio 8

Una massa attaccata a una molla si muove di moto armonico. La velocità massima della massa è $v_{\max} = 3\,\text{m/s}$, mentre l'accelerazione massima è $a_{\max} = 18\,\text{m/s}^2$. Qual è l'ampiezza e la frequenza del moto della massa?

Esercizio 8

Una massa attaccata a una molla si muove di moto armonico. La velocità massima della massa è $v_{\max} = 3\,\mathrm{m/s}$, mentre l'accelerazione massima è $a_{\max} = 18\,\mathrm{m/s^2}$. Qual è l'ampiezza e la frequenza del moto della massa?

Non sapendo la posizione della massa all'istante iniziale del moto $t = 0$, la legge oraria del moto della massa, supponendo che il moto avvenga in direzione x, si scriverà nella forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Di conseguenza per la velocità e l'accelerazione della massa si scriverà:

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \qquad\qquad a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi),$$

ottenendo così:

$$\begin{cases} v_{\max} &= \omega A \\ a_{\max} &= \omega^2 A. \end{cases}$$

Si può allora ricavare

$$\omega = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = 18\,\text{rad/s}.$$

In conclusione, si trova:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = 0{,}5\,\text{m} \qquad \text{e} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}95\,\text{Hz}.$$

Ovviamente si poteva scrivere $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, cosicché si avrebbe avuto

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \qquad\qquad a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi),$$

ottenendo così:

$$\begin{cases} v_{\max} & = \omega A \\ a_{\max} & = \omega^2 A \end{cases}$$

come nel caso precedente.

Nota sulla conservazione dell’energia

- Energia: capacità di una forza o, più in generale di un sistema, di compiere lavoro
- Energia cinetica $E_c = 1/2mv^2$.
- Energia potenziale E_p (solo per forze conservative).
- Energia meccanica $E_m = E_c + E_p$.

Vi sono altre forme di energia oltre all'energia meccanica; ad esempio:

- Elettrica.
- Chimica.
- Termica.
- Nucleare.

La variazione di energia meccanica di un sistema è uguale al lavoro delle forze non conservative: $\boldsymbol{\Delta E_m = L_{nc}}$ (1).

- È possibile osservare sperimentalmente che tutte le volte che forze non conservative compiono un lavoro spostando un punto materiale, si presenta qualche altro processo concomitante nel sistema fisico di cui il punto materiale fa parte, come per esempio produzione di calore, di onde sonore, separazione di cariche elettriche ecc.: in tali processi si possono riconoscere altre energie (termica, elettrica, chimica ecc.) la cui variazione fra le posizioni iniziale e finale del corpo sembra corrispondere perfettamente al lavoro compiuto dalle forze non conservative.
- Se si introducono questi altri tipi di energia, il primo membro della (1) può ancora esprimersi mediante variazioni di energia che accompagnano il passaggio del punto fra la posizione iniziale 1 e quella finale 2. È logico allora portare questi termini nel secondo membro, quello dell'energia, e scrivere:

$$E_2 - E_1 + \text{variazioni di altri tipi di energia} = 0.$$

Di conseguenza, indicando con E_{tot} la somma di tutte le energie possedute dal punto materiale, o presenti nell'ambiente per effetto dell'interazione con questo, e che chiamiamo energia totale in corrispondenza a uno stato di un sistema, si potrà scrivere:

$$E_{\mathrm{tot}} = \mathrm{costante}.$$

È questa una delle leggi fondamentali della fisica classica, quella della conservazione dell'energia: in un qualsiasi processo durante il quale azioni di vario genere si esercitano su un sistema, l'energia può trasformarsi da una forma in un'altra ma non può essere creata né distrutta: l'energia totale resta costante.