

Complementi di Fisica - VIII Lezione

Potenziale elettrostatico
Superfici equipotenziali

Andrea Bettucci

4 aprile 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Potenziale elettrostatico

Forze conservative

Se una forza \mathbf{F} è conservativa è possibile definire l'energia potenziale $U(x, y, z)$ tale che

$$L = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_a - U_b = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad L = -\Delta U.$$

In un campo di forze conservative l'energia meccanica E rimane costante:

$$E = T + U$$

dove T rappresenta l'energia cinetica

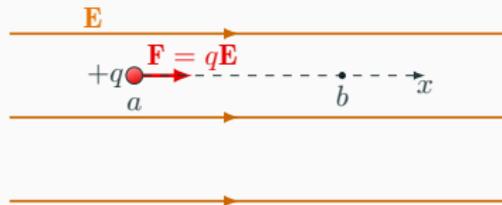
$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

La forza di Coulomb è conservativa

Per una carica positiva q che sotto l'azione di un campo elettrostatico \mathbf{E} si muova dalla posizione a alla posizione b

$$\Delta U = U_b - U_a = - \int_a^b q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

In un campo elettrico uniforme



$$U_b - U_a = - \int_a^b q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -qE(x_b - x_a) = -qEd.$$

Spostandosi da sinistra verso destra con accelerazione costante, la carica q diminuisce la propria energia potenziale e aumenta della stessa quantità l'energia cinetica: l'energia meccanica si conserva.

Potenziale elettrostatico

Il potenziale elettrostatico V è l'energia potenziale per unità di carica.

Se una carica q possiede nel punto b energia potenziale elettrica U_b (rispetto allo zero dell'energia potenziale), il potenziale elettrostatico di quel punto è

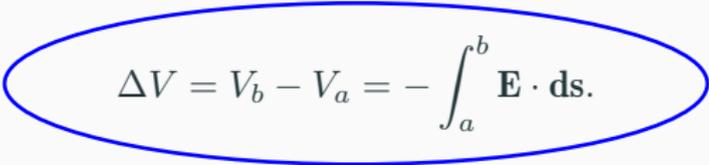
$$V_b = \frac{U_b}{q}.$$

- Il potenziale elettrostatico (come il campo elettrico) non dipende dalla carica di prova q . V dipende solo dalle cariche che creano il campo: la carica q in un punto del campo acquista una data energia potenziale per effetto del potenziale V in quel punto creato da altre cariche.
- L'unità di misura del **potenziale elettrostatico** (che è una **funzione scalare**) è joule/coulomb detto **volt**: $1\text{ V} = 1\text{ J}/1\text{ C}$.

Dal punto di vista fisico quelle che sono perfettamente determinate sono le **differenze di potenziale** fra punti.

Dati due punti a e b in un campo elettrico, la differenza di potenziale tra i due punti è:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{1}{q} \left(- \int_a^b q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right).$$


$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

La differenza di potenziale tra due punti a e b è uguale al lavoro cambiato di segno che la forza del campo compie quando una carica positiva unitaria si sposta dal punto a al punto b .

Anche la differenza di potenziale tra due punti (detta anche **tensione** o **voltaggio**) si misura in volt.

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad V_b = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + V_a.$$

Il potenziale V_b in un generico punto b di un campo elettrico dipende dalla scelta arbitraria del potenziale nel punto di riferimento a .
Di solito si assume nullo il potenziale nel punto a .

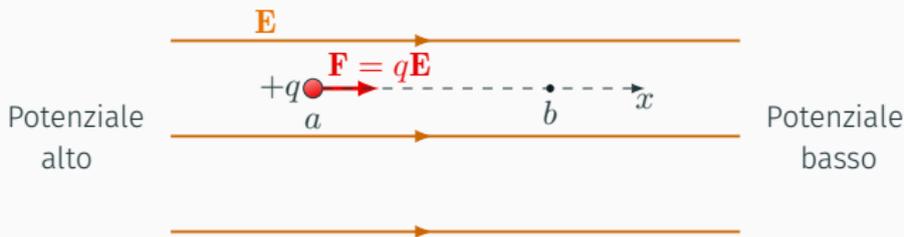
Potenziale in un punto

$$V_b = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Il potenziale in un punto b è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene spostata dal punto in considerazione al punto di riferimento a (dove il potenziale è arbitrariamente posto a zero)

Dove porre a zero il potenziale?

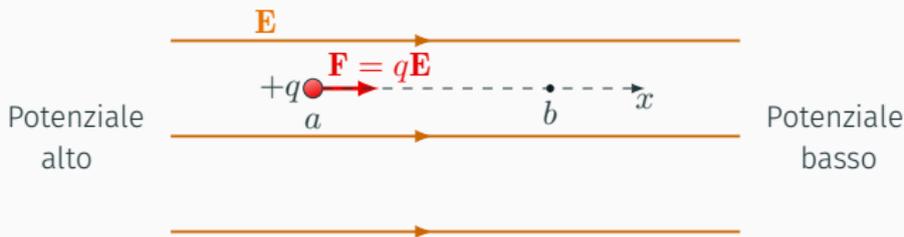
- Spesso il suolo (la Terra), o un conduttore connesso direttamente al suolo, è assunto come zero del potenziale e tutti gli altri valori del potenziale sono riferiti al suolo. Si dice quindi, ad esempio, che un punto ha un potenziale di 100 V se la differenza di potenziale tra questo punto e il suolo è 100 V.
- In altri casi, vedremo più avanti, sarà conveniente scegliere come zero del potenziale quello di un punto posto all'infinito ($r \rightarrow \infty$). In questo caso, il potenziale in un punto è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene portata dal punto che si considera all'infinito.



$$U_b - U_a = - \int_a^b q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -qE(x_b - x_a) = -qEd < 0$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -Ed < 0 \quad (1)$$

- Le cariche positive si muovono verso i punti a potenziale decrescente: $\Delta V < 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Le cariche negative si muovono verso i punti a potenziale crescente: $\Delta V > 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Il campo elettrico è diretto verso i potenziali decrescenti.



$$U_b - U_a = - \int_a^b q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -qE(x_b - x_a) = -qEd < 0$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -Ed < 0 \quad (1)$$

- Le cariche positive si muovono verso i punti a potenziale decrescente: $\Delta V < 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Le cariche negative si muovono verso i punti a potenziale crescente: $\Delta V > 0 \Rightarrow \Delta U = q\Delta V < 0$.
- Il campo elettrico è diretto verso i potenziali decrescenti.

Dall'Eq. (1) si vede come il campo elettrico si può anche misurare in V/m

Le sorgenti di energia elettrica, come le pile, hanno lo scopo di mantenere una differenza di potenziale.

La quantità di energia prodotta da questi dispositivi dipende dalla carica che fluisce e dalla differenza di potenziale.



Esempio

Si supponga di avere una batteria da 1,5V che alimenta una lampadina: la quantità di energia elettrica trasformata in luce e calore dipende dal flusso totale di carica, che a sua volta dipende da quanto la batteria resta accesa.

Se in un certo tempo Δt fluiscono 2 C di carica attraverso la lampadina

$$\Delta U = q\Delta V = (2 \text{ C}) \cdot (1,5 \text{ V}) = 3 \text{ J}$$

Se il tempo di accensione fosse doppio, fluirebbero 4 C di carica e l'energia elettrica trasformata in luce e calore sarebbe

$$\Delta U = (4 \text{ C}) \cdot (1,5 \text{ V}) = 6 \text{ J}$$

Alcune tipiche differenze di potenziale

Sorgente	V, volt
Nubi temporalesche rispetto al terreno	$\sim 10^8$
Linea elettrica di alta tensione	$\sim 10^6$
Elettrodi candela automobile	$\sim 10^4$
Presa di corrente domestica	220
Batteria automobile	12
Potenziale a riposo attraverso membrana cellula nervosa	10^{-1}
Variazione di potenziale sulla pelle (elettrocardiogramma ed elettroencefalogramma)	10^{-4}

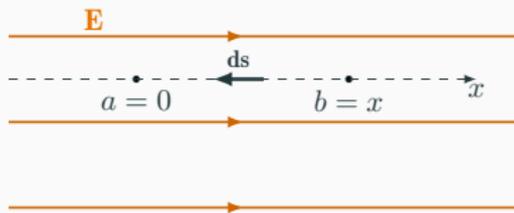
Esercizio

Un campo elettrico punta nella direzione positiva dell'asse x e ha intensità costante pari a $10 \text{ N/C} = 10 \text{ V/m}$. Si determini come varia il potenziale in funzione di x , assumendo $V = 0$ in $x = 0$.

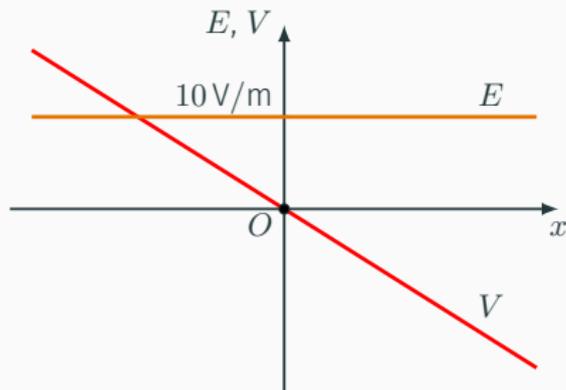
Il potenziale in un punto b è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene spostata dal punto in considerazione al punto di riferimento a (dove il potenziale è arbitrariamente posto a zero).

$$V_b = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Nel caso dell'esercizio il punto b è un generico punto di coordinata x e il punto a è il punto in $x = 0$.



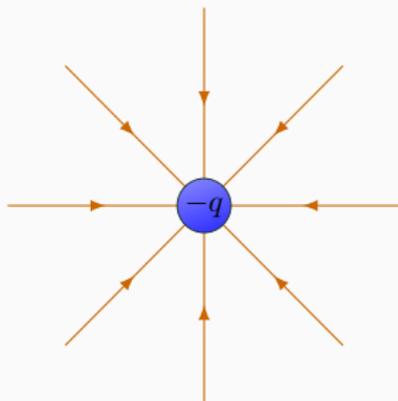
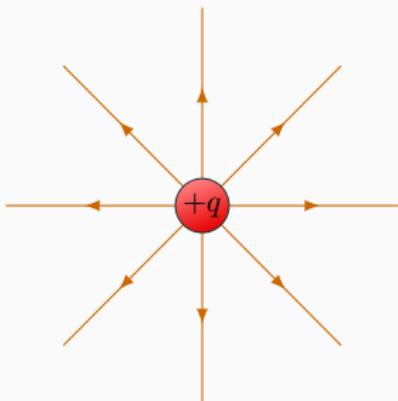
$$V(x) = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \int_x^0 dx = -Ex = -(10 \text{ V/m})x$$



Il potenziale decresce di 10V per ogni metro di spostamento da sinistra verso destra.

Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Si determini il potenziale V in funzione della distanza r da una carica puntiforme q .



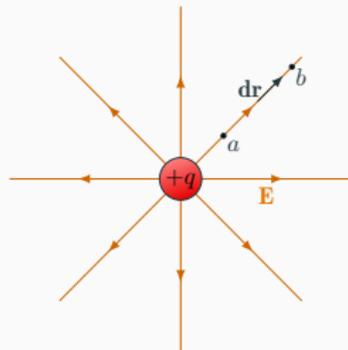
Il campo elettrico di una carica puntiforme è diretto radialmente e vale

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

essendo r la distanza dalla carica e \mathbf{r}/r il versore radiale (uscente dalla carica)

Presi due punti a (di riferimento) e b a distanza r_a ed r_b dal centro della sfera

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

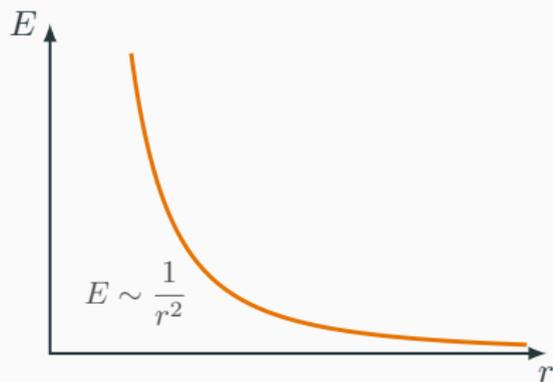
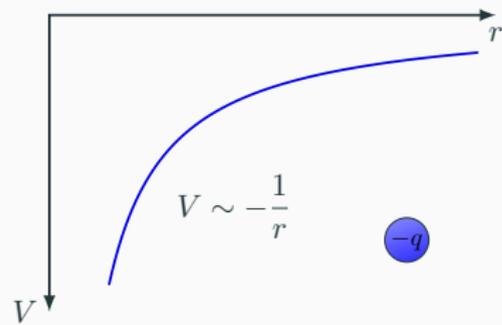
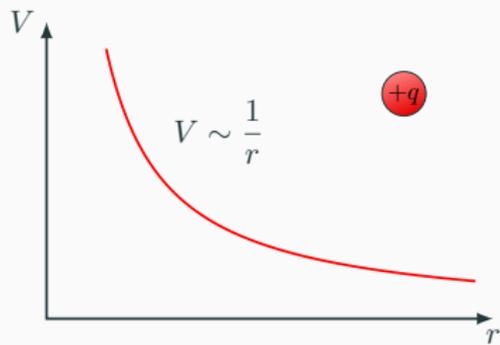


$$V_b - V_a = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right)$$

Se si pone a all'infinito ($r_a \rightarrow \infty$) con $V_a = 0$

$$V_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

V può essere pensato come il potenziale assoluto della carica a distanza r , avendo posto $V = 0$ per $r \rightarrow \infty$, o come la differenza di potenziale tra un punto a distanza r dalla carica e un punto all'infinito.



Anche per il potenziale vale il principio di sovrapposizione

Se si hanno più cariche, il potenziale in un punto P sarà la somma dei potenziali creati dalle singole cariche in quel punto.

- Per un sistema di n cariche puntiformi

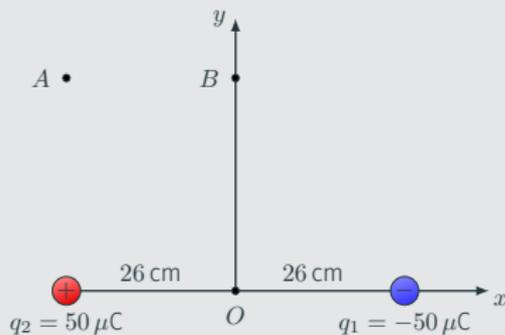
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i}{r_i}$$

- Per una distribuzione C continua di carica

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{dq}{r}$$

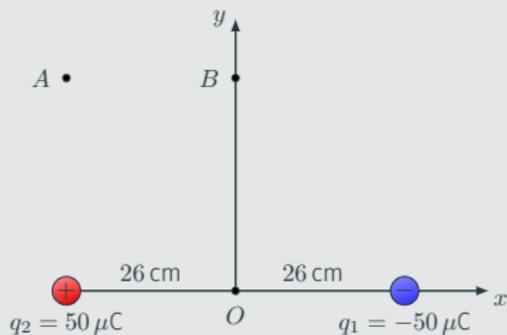
Esercizio

Si determini il potenziale elettrostatico generato dalle due cariche della figura nei punti $A(-26 \text{ cm}, 30 \text{ cm})$ e $B(0 \text{ cm}, 30 \text{ cm})$.



Esercizio

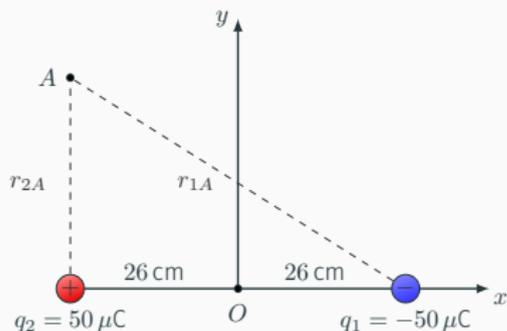
Si determini il potenziale elettrostatico generato dalle due cariche della figura nei punti $A(-26 \text{ cm}, 30 \text{ cm})$ e $B(0 \text{ cm}, 30 \text{ cm})$.



Per il punto A

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1A}} + \frac{q_2}{r_{2A}} \right)$$

$r_{1A} = 60 \text{ cm}$ e $r_{2A} = 30 \text{ cm}$.

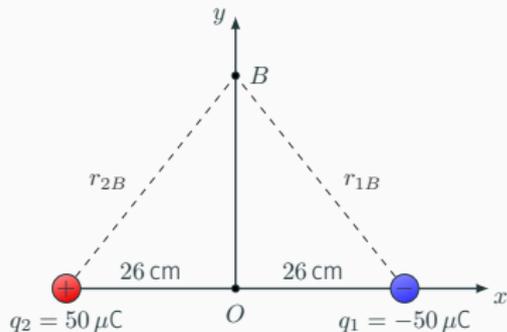


$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-5 \times 10^{-5} \text{ C}}{0,6 \text{ m}} + \frac{5 \times 10^{-5} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} \right) = 7,5 \times 10^5 \text{ V.}$$

Per il punto B

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1B}} + \frac{q_2}{r_{2B}} \right)$$

$$r_{1B} = r_{2B} = 40 \text{ cm.}$$



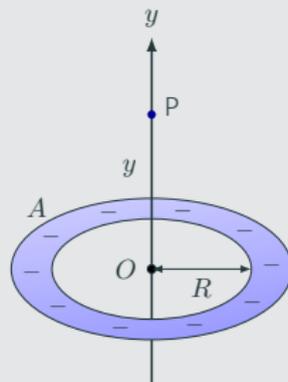
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-5 \times 10^{-5} \text{ C}}{0,4 \text{ m}} + \frac{5 \times 10^{-5} \text{ C}}{0,4 \text{ m}} \right) = 0 \text{ V.}$$

- Essendo le due cariche uguali e contrarie, il potenziale sarà nullo in tutti i punti equidistanti dalle due cariche.
- Tutti i punti che giacciono sul piano normale all'asse x passante per O (piano yz) hanno potenziale nullo.
- Il luogo dei punti dello spazio nei quali il potenziale V è costante si chiama **superficie equipotenziale**.

Esercizio

Un sottile anello A di forma circolare di raggio R porta una carica negativa $-q$ uniformemente distribuita.

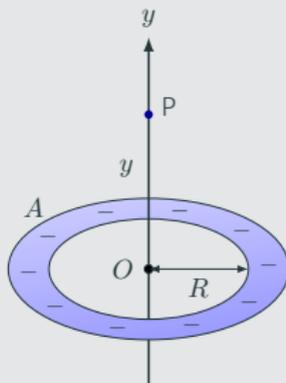
Si determini il potenziale in un punto P dell'asse dell'anello a distanza y da suo centro O .



Esercizio

Un sottile anello A di forma circolare di raggio R porta una carica negativa $-q$ uniformemente distribuita.

Si determini il potenziale in un punto P dell'asse dell'anello a distanza y da suo centro O .

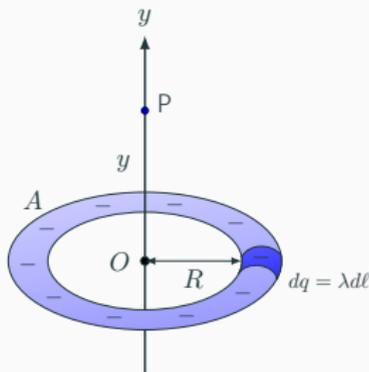


La densità lineica di carica è:

$$\lambda = -\frac{q}{2\pi R}$$

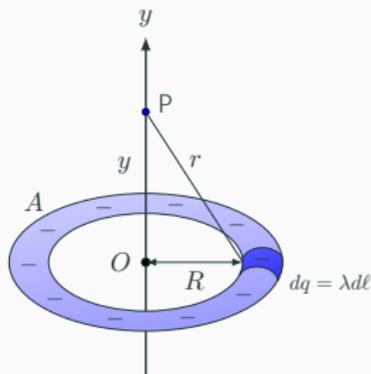
Ogni piccolo elemento di lunghezza $d\ell$ possiede una carica

$$dq = \lambda d\ell < 0$$



Ogni punto dell'anello è equidistante da P e la distanza vale $r = \sqrt{y^2 + R^2}$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \int_A dq$$



In conclusione, il potenziale nel punto P è determinato

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

Nei punti dell'asse molto lontani dall'anello ($y \gg R$)

$$V(P) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 y}$$

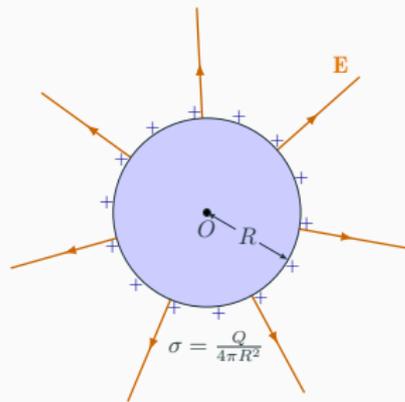
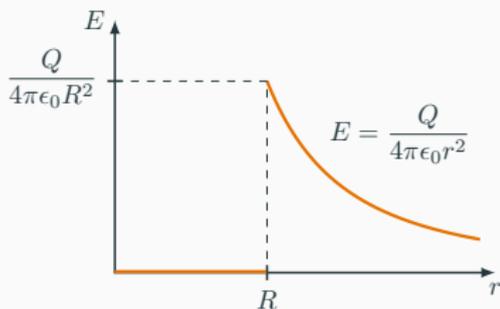
Risultato corretto?

Potenziale elettrostatico di una sfera conduttrice carica

Si determini il potenziale V in funzione della distanza r dal centro di una sfera conduttrice di raggio R uniformemente carica. La carica totale della sfera è Q .

Potenziale elettrostatico di una sfera conduttrice carica

Si determini il potenziale V in funzione della distanza r dal centro di una sfera conduttrice di raggio R uniformemente carica. La carica totale della sfera è Q .

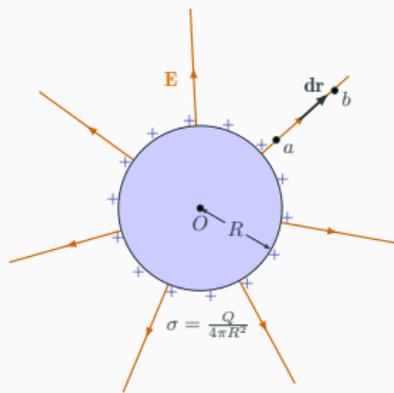


- Nei conduttori le cariche in eccesso si distribuiscono sulla superficie e al loro interno il campo elettrico è nullo.
- Per una sfera conduttrice di raggio R che possieda una carica Q , il campo elettrico per $r > R$ è radiale di intensità pari a quello di una carica puntiforme Q posta al centro della sfera.

$$1) r \geq R \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Presi due punti a (di riferimento) e b a distanza r_a ed r_b dal centro della sfera

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$



$$V_b - V_a = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right)$$

Se si pone a all'infinito ($r_a \rightarrow \infty$) con $V_a = 0$

$$V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{per } r > R$$

Il potenziale elettrico in punti esterni a una sfera conduttrice uniformemente carica è uguale a quello che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel suo centro

In particolare se $r = R$, ovvero il punto b si trova sulla superficie della sfera

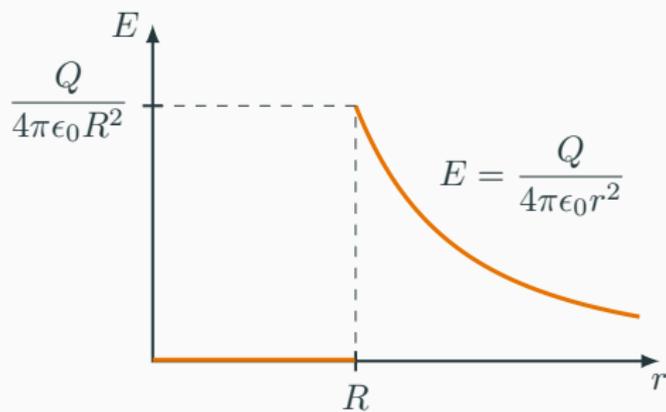
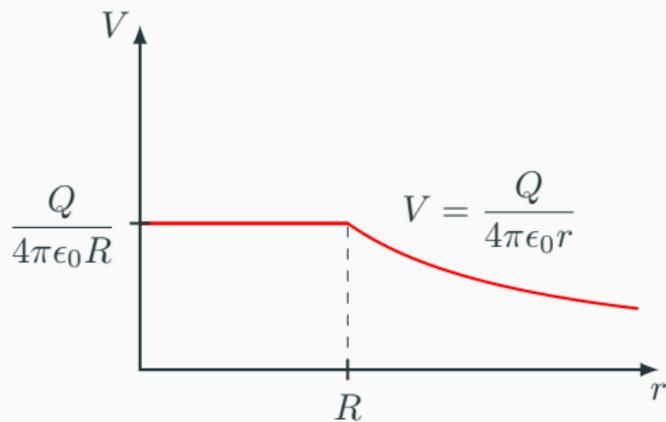
$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

2) $r < R \Rightarrow \mathbf{E} = 0$

La differenza di potenziale tra un punto sulla superficie della sfera ($r = R$) e un qualsiasi punto interno è nulla: tutti i punti interni alla sfera si trovano allo stesso potenziale di quelli della superficie:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Tutta la sfera si trova allo stesso potenziale pari a quello sulla sua superficie.



Il campo elettrostatico all'interno
di un conduttore omogeneo e isotropo
in equilibrio è nullo.

Di conseguenza, la superficie e tutto il volume
occupato dal conduttore in condizioni
di equilibrio (statiche)
sono equipotenziali.

Superfici equipotenziali

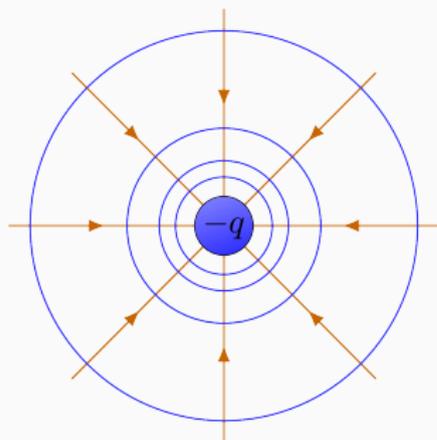
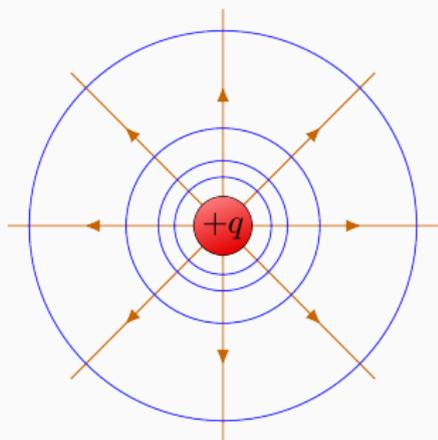
Superfici equipotenziali

Il luogo dei punti dello spazio nei quali il potenziale V è costante si chiama **superficie equipotenziale**.

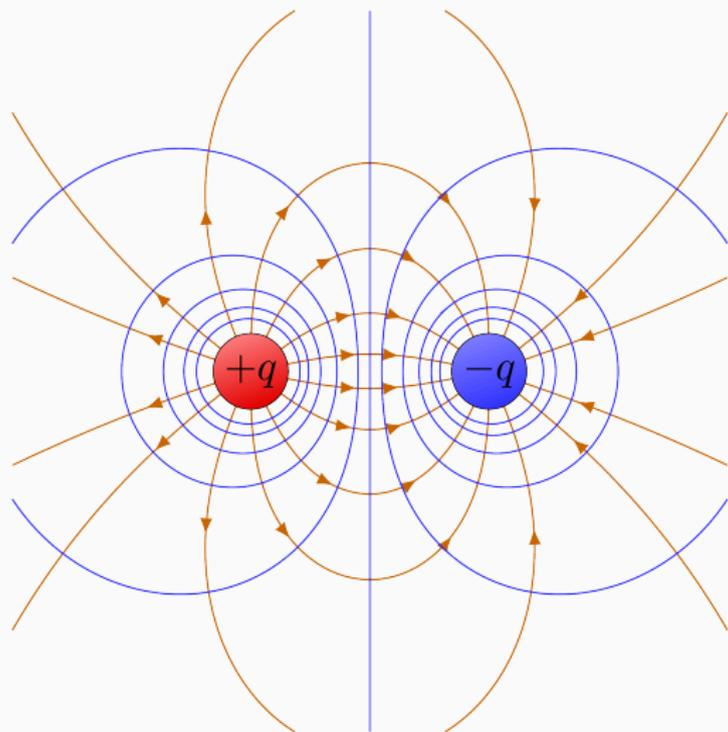
Per avere un'efficace rappresentazione grafica del campo scalare V è opportuno considerare superfici equipotenziali per incrementi ΔV costanti del potenziale.

Per una **carica puntiforme** le superfici equipotenziali (blu) sono le superfici di sfere concentriche con la carica

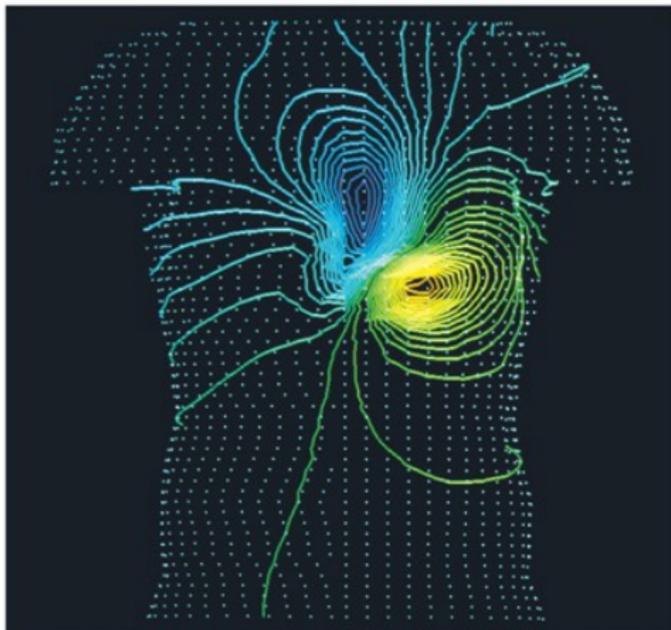
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



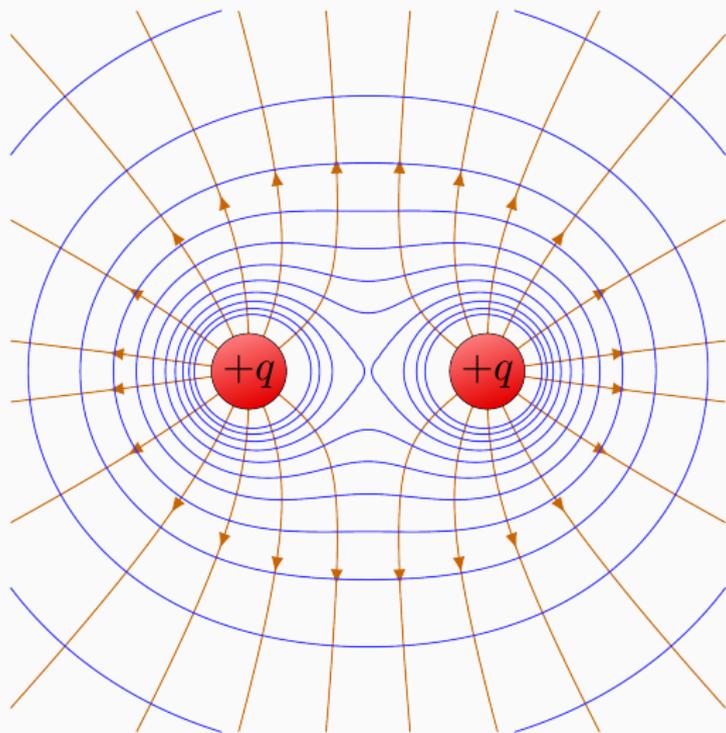
Superfici equipotenziali di un **dipolo elettrico**



Anche il cuore umano ha una struttura del campo elettrico dipolare

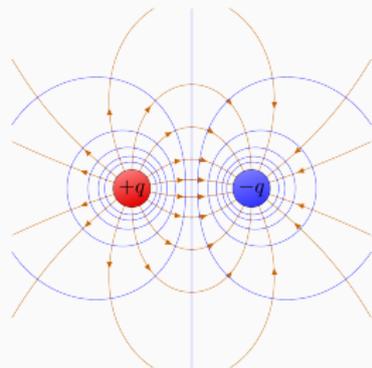
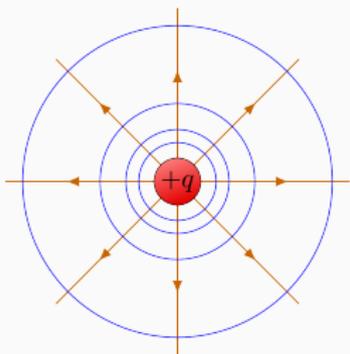


Superfici equipotenziali di **due cariche puntiformi positive identiche**



Tre punti sui quali meditare:

1. Per un punto dello spazio che non sia occupato da una carica passa una sola superficie equipotenziale (così come passa una sola linea di forza).
2. Le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali
3. Le superfici equipotenziali, che sono disegnate per incrementi di ΔV costante, sono più fitte nelle zone dove il campo elettrico è più intenso

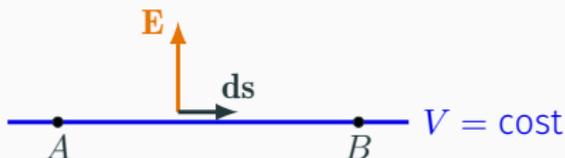


1. Per un punto dello spazio che non sia occupato da una carica passa una sola superficie equipotenziale (così come passa una sola linea di forza).

$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$: se una carica q si trova in un punto dove si esercita un campo elettrico \mathbf{E} , sarà sottoposta a una sola forza.

2. Le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali.

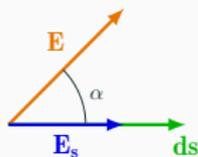
$$V_B - V_A = 0 \quad \Rightarrow \quad - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



Perché le superfici equipotenziali, che sono disegnate per incrementi di ΔV costante, sono più fitte nelle zone dove il campo elettrico è più intenso?

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E ds \cos \alpha = -E_s ds$$

essendo E_s la componente di \mathbf{E} lungo $d\mathbf{s}$: le stesse variazioni dV del potenziale si ottengono per spostamenti ds più piccoli in zone dove il campo elettrico è più intenso rispetto a zone dove il campo elettrico è meno intenso.



$$E_s = -\frac{dV}{ds} \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- Vi è un campo elettrico in una data direzione solo se in quella direzione vi è una variazione del potenziale.
- Il campo elettrico è diretto verso i potenziali decrescenti.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{E} = (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{E} = (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V.$$

Il campo elettrico è il gradiente cambiato di segno del potenziale.