Sia $\mathcal{R}$ un disco circolare rigido omogeneo pesante, di centro C massa $\mathcal{M}$ e raggio r, che presenta una cavità circolare di raggio $r/2$ e tangente internamente al bordo del disco stesso. Siano A il centro della cavità e ξ l'asse solidale, dato da $(C, vers\ \overrightarrow{AC})$.

Nello spazio terrestre supposto inerziale il corpo $\mathcal{R}$ è vincolato a muoversi su un piano verticale fisso rispetto a terra. Sia (x, y) tale piano, con y verticale e orientato verso l'alto.

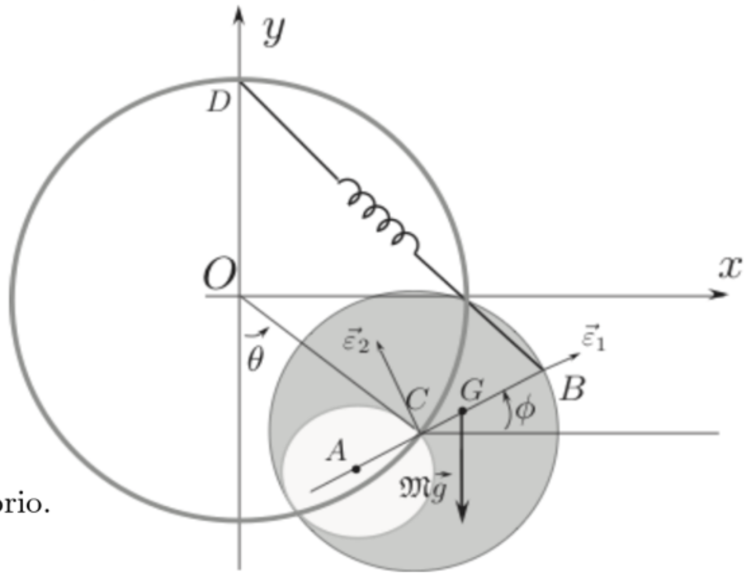
Il centro C del disco è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa nel piano (x, y), avente centro nell'origine O del sistema di riferimento e raggio $R =: \beta r$ con $\beta > 1$.

Sia θ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{OC}$ forma rispetto al versore $-\vec{e}_2$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$, sia B il punto fisso sul bordo del disco e di coordinate (relative) $(r,\ 0,\ 0)$, e sia ϕ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{CB}$ forma rispetto al versore $\vec{e}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema, oltre ai pesi e alla sollecitazione vincolare, agisce una forza elastica, di costante elastica k, applicata al punto B e avente centro nel punto D del sistema di riferimento che ha coordinate $(0,\ R,\ 0)$.

Si assumano come coordinate lagrangiane le due anomalie θ e ϕ, si introduca la costante positiva ρ tale che $\mathcal{M}g =: \rho\, k\, R$, e si risolvano i seguenti punti usando le costanti $r,\ \rho,\ \beta$.



0) (*Facoltativo*) Dimostrare che sussistono le relazioni $\xi_G = r/6$, e $J_{G,\vec{e}_3} = \frac{37}{72}\ \mathcal{M}r^2$.

1) Esprimere le energie cinetica e potenziale del sistema e ricavarne le equazioni di Lagrange.

2) Determinare le condizioni di equilibrio;in particolare, studiare lastabilità degli equilibri che sono presenti quando $\mathcal{M}g = k\,R$. Mostrare poi che se $\mathcal{M}g \gg k\,R$, quelle già trovate risultano le uniche posizioni di equilibrio.

3) Scrivere le equazioni cardinali e (*facoltativo*) verificare le equazioni trovate nel Punto 1).

4) Ancora per $\mathcal{M}g = k\,R$, ricavare esplicitamente le espressioni globali $(\vec{F}^v,\ \vec{M}^v_G)$ della sollecitazione vincolare con la quale la guida agisce sul disco in un istante in cui si hanno $\left(\theta_0 = 0,\ \phi_0 = 0,\ \dot\theta_0 = \sqrt{g/R},\ \dot\phi_0 = \sqrt{6\,g/R}\right)$, e specificare il valore assunto, in tale istante, dalla costante c tale che $\vec{M}^v_G = c\,\mathcal{M}g\,r\,\vec{e}_3$.

5) Imponendo l'ulteriore vincolo $\theta = \theta^* \in (-\pi,\ \pi]$ discutere qualitativamente il moto al variare del parametro $\rho := \mathcal{M}g/kR$. Si suggerisce di affrontare tale studio introducendo la variabile $\phi + \alpha$ con α un'opportuna costante.

Risoluzione

Punto 0) L'ascissa ξ_G del baricentro e il momento d'inerzia $J_{G,\vec{e}_3}$ del corpo $\mathfrak{R}$ sono conseguenze delle seguenti

$$0 = \mu\pi\frac{r^2}{4}\left(-\frac{r}{2}\right) + \mu\pi\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)\xi_G\ , \qquad \text{con} \quad \mu\pi\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \mathfrak{M}$$

$$\mu\pi\, r^2\,\frac{r^2}{2} - \mu\pi\,\frac{r^2}{4}\left(\frac{r^2/4}{2} + \frac{r^2}{4}\right) = \mathfrak{M}\,\xi_G^2 + J_{G,\vec{e}_3}\ , \qquad \mathfrak{M}\,\xi_G = \mu\pi\,\frac{r^2}{4}\,\frac{r}{2}\ .$$

Pertanto $\mathfrak{M}\,\xi_G^2 + J_{G,\vec{e}_3} = \dfrac{13}{8}\,\mu\pi\, r^2\,\dfrac{r^2}{4}$ e quindi, dato che $\mu\,\pi\,\dfrac{r^2}{4} = \dfrac{1}{3}\,\mathfrak{M}$, seguono $\xi_G = \dfrac{r}{6}$

e $J_{G,\vec{e}_3} = \mathfrak{M}\, r^2\left(\dfrac{13}{24} - \dfrac{1}{36}\right) = \dfrac{37}{72}\,\mathfrak{M}\, r^2$ insieme con $\mathfrak{M}\,\xi_G^2 + J_{G,\vec{e}_3} = \dfrac{13}{24}\,\mathfrak{M}\, r^2$.

Punto 1) Sussistono le relazioni (nelle quali non verrà scritta la terza componente dei vettori se questi sono sul piano (x, y))

$$\left(\overrightarrow{OC}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}, \qquad \left(\vec{\varepsilon}_1\right)_e = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{CB}\right)_e = r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\overrightarrow{OG}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix} + \xi_G\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}, \qquad \left(\overrightarrow{OB}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{v}_C\right)_e = R\,\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \qquad \left(\vec{v}_G\right)_e = R\,\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \xi_G\,\dot\phi\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{a}_C\right)_e = R\begin{pmatrix}\ddot\theta\,\cos\theta - \dot\theta^2\,\sin\theta\\ \ddot\theta\,\sin\theta + \dot\theta^2\,\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{BD}\right)_e = \begin{pmatrix}-R\,\sin\theta - r\,\cos\phi\\ R + R\cos\theta - r\,\sin\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{a}_G\right)_e = R\begin{pmatrix}\ddot\theta\,\cos\theta - \dot\theta^2\,\sin\theta\\ \ddot\theta\,\sin\theta + \dot\theta^2\,\cos\theta\end{pmatrix} + \xi_G\begin{pmatrix}-\ddot\phi\,\sin\phi - \dot\phi^2\,\cos\phi\\ \ddot\phi\,\cos\phi - \dot\phi^2\,\sin\phi\end{pmatrix}.$$

$$\left(\overrightarrow{OC}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}, \qquad \left(\vec{\varepsilon}_1\right)_e = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{CB}\right)_e = r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\overrightarrow{OG}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix} + \xi_G\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}, \qquad \left(\overrightarrow{OB}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{v}_C\right)_e = R\,\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \qquad \left(\vec{v}_G\right)_e = R\,\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \xi_G\,\dot\phi\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{a}_C\right)_e = R\begin{pmatrix}\ddot\theta\,\cos\theta - \dot\theta^2\,\sin\theta\\ \ddot\theta\,\sin\theta + \dot\theta^2\,\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{BD}\right)_e = \begin{pmatrix}-R\,\sin\theta - r\,\cos\phi\\ R + R\cos\theta - r\,\sin\phi\end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{a}_G\right)_e = R\begin{pmatrix}\ddot\theta\,\cos\theta - \dot\theta^2\,\sin\theta\\ \ddot\theta\,\sin\theta + \dot\theta^2\,\cos\theta\end{pmatrix} + \xi_G\begin{pmatrix}-\ddot\phi\,\sin\phi - \dot\phi^2\,\cos\phi\\ \ddot\phi\,\cos\phi - \dot\phi^2\,\sin\phi\end{pmatrix}.$$

Di conseguenza si hanno le

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathfrak{M}\,g\,y_G + \frac{1}{2}\,k\,\left((R\,\sin\theta + r\,\cos\phi)^2 + (R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)^2\right)\\
&= \mathfrak{M}\,g\,(-R\cos\theta + \xi_G\sin\phi) + \frac{1}{2}\,k\,\left(2R(R\,\cos\theta - r\,\sin\phi) + 2Rr\,\sin(\theta-\phi)\right) + cost.\\
&= (-\mathfrak{M}\,gR + kR^2)\,\cos\theta + (\mathfrak{M}\,g\xi_G - kRr)\,\sin\phi + kRr\,\sin(\theta-\phi) + cost.\,,\\
\mathcal{T} &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,R^2\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,\xi_G^2\,\dot\phi^2 + \mathfrak{M}\,R\xi_G\,\dot\phi\dot\theta\,\sin(\theta-\phi) + \frac{1}{2}\,J_{G,\vec{e}_3}\,\dot\phi^2\\
&= \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,R^2\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,r^2\,\frac{13}{24}\,\dot\phi^2 + \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\dot\phi\dot\theta\,\sin(\theta-\phi)\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} = -(-\mathfrak{M}\,gR + kR^2)\,\sin\theta + kRr\,\cos(\theta-\phi)\\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\phi} = +(\mathfrak{M}\,g\xi_G - kRr)\,\cos\phi - kRr\,\cos(\theta-\phi)\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\theta} = \mathfrak{M}\,R^2\,\dot\theta + \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\dot\phi\,\sin(\theta-\phi)\\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\phi} = \dfrac{13}{24}\,\mathfrak{M}\,r^2\,\dot\phi + \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\dot\theta\,\sin(\theta-\phi)\end{cases} \tag{5.0.23}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta^2} &= -(-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\, \cos\theta - kRr\, \sin(\theta-\phi) \\
\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^2} &= -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\, \sin\phi - kRr\, \sin(\theta-\phi) \\
\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta \partial \phi} &= +kRr\, \sin(\theta-\phi)
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\theta^2} &= \mathfrak{M}\, R^2 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\phi^2} &= \frac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\theta \partial \dot\phi} &= \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\ \sin(\theta-\phi) \\
\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} &= \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\ \dot\phi\dot\theta\ \cos(\theta-\phi) \\
\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \phi} &= -\frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\ \dot\phi\dot\theta\ \cos(\theta-\phi)\ .
\end{aligned}
\right.
\tag{5.0.24}
$$

Dalle (5.0.23) seguono anche le equazioni di Lagrange:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{L}_\theta \\ \\ \mathcal{L}_\phi
\end{array}
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\, R^2\, \ddot\theta + \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \ddot\phi\, \sin(\theta-\phi) - \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\phi^2\, \cos(\theta-\phi) \\
&\qquad = (-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\, \sin\theta - kRr\, \cos(\theta-\phi) \\
&\frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \ddot\theta\, \sin(\theta-\phi) + \frac{13}{24}\, \mathfrak{M}\, r^2\, \ddot\phi + \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \dot\theta^2\, \cos(\theta-\phi) \\
&\qquad = -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\, \cos\phi + kRr\, \cos(\theta-\phi)
\end{aligned}
\right.
\tag{5.0.25}
$$

e (qualora fossero richieste) le loro linearizzate nella posizione (θ_e, ϕ_e):

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{M}\, R^2\, \ddot\theta + \frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\ \sin(\theta_e-\phi_e)\ \ddot\phi &= \Big(-(-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\, \cos\theta_e - kRr\, \sin(\theta_e-\phi_e)\Big)\ (\theta-\theta_e) \\
&\quad + kRr\, \sin(\theta_e-\phi_e)\ (\phi-\phi_e) \\
\frac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\ \sin(\theta_e-\phi_e)\ \ddot\theta + \frac{13}{24}\ \mathfrak{M}\, r^2\, \ddot\phi &= kRr\, \sin(\theta_e-\phi_e)\ (\theta-\theta_e) \\
&\quad - \Big((\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\, \sin\phi_e + kRr\, \sin(\theta_e-\phi_e)\Big)\ (\phi-\phi_e)
\end{aligned}
\right.
\tag{5.0.26}
$$

Punto 2) Dalle (5.0.25) si ricavano le condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} (-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\,\sin\theta - kRr\,\cos(\theta-\phi) \;=\; 0\;, \\ -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\,\cos\phi + kRr\,\cos(\theta-\phi) \;=\; 0\;, \end{cases} \tag{5.0.27}$$

che, con $\mathfrak{M}\, g =: \rho k R$ ed $R = \beta\, r$, forniscono le $\begin{cases} a\,\sin\theta \;=\; \cos(\theta-\phi)\;, \\ b\,\cos\phi \;=\; -\cos(\theta-\phi)\;, \end{cases}$ da cui

$$\begin{cases} a\,\sin\theta \;=\; -b\,\cos\phi\;, \\ a\,\sin\theta \;=\; \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\;, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} a := \dfrac{k\,R^2 - \mathfrak{M}\,g\,R}{k\,R\,r} \;=\; \beta\,(1-\rho) \\ b := \dfrac{k\,R\,r - \mathfrak{M}\,g\,\xi_G}{k\,R\,r} \;=\; (1-\rho/6)\;, \end{cases} \tag{5.0.28}$$

ovvero, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$,

$$-\frac{a}{b}\,\cos\theta\sin\theta \pm \sin\theta\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\,\sin^2\theta} \;=\; a\,\sin\theta\;; \tag{5.0.29}$$

ne segue che o è $\sin\theta = 0$ oppure

$$\pm\sqrt{b^2 - a^2 + a^2\,\cos^2\theta} \;=\; a\,b + a\,\cos\theta \qquad \text{che dà} \qquad 2a^2\,b\,\cos\theta \;=\; -(a^2b^2 + a^2 - b^2).$$

Pertanto, dato che è $\xi_G < r < R$, dalle (5.0.27) e (5.0.28) si hanno i seguenti casi:

1) $\mathfrak{M}\,g \;=\; k\,R$ che implica $a = 0$ e $b \neq 0$ con $\cos(\theta-\phi) = 0$ e quindi $\cos\phi = 0$ e $\sin\theta = 0$;

2) $\mathfrak{M}\, g\,\xi_G \;=\; k\,R^2$ e $a \neq 0,\;\; b = 0,$ che implica di nuovo $\cos(\theta-\phi)=0$ e quindi $\cos\phi = 0$ e $\sin\theta = 0$;

3) $a \neq 0$ e $b \neq 0,$ e le (5.0.28) e (5.0.29)implicano:

o che $\sin\theta = 0$ e dunque anche $\cos\phi = 0,$ oppure che

$$\cos\theta_e = -\,\frac{b^2(a^2-1)+a^2}{2a^2 b} \;=\; -\frac{b}{2}\left(1-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \;=:\; \chi\,, \qquad \text{purché sia} \qquad \chi \in [-1,+1].$$

È facile concludere che se $\rho \to \infty$ allora $a \to -\infty$ e $b \to -\infty,$ e quindi $\chi \to \chi_+ := +\infty.$

In definitiva, se $\mathfrak{M}\, g \;=\; k\,R,$ (e cioè $\rho = 1$), dalle (5.0.28) segue (come si è detto) $\cos(\theta-\phi) = 0$ e quindi $\cos\phi = 0$. Pertanto $\sin\theta \sin\pi = 0$ da cui $\sin\theta = 0$, (e viceversa). Ne seguono quattro posizioni di equilibrio

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 = 0 \\ \phi_1 = +\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 = 0 \\ \phi_2 = -\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 = \pi \\ \phi_3 = +\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_4 = \begin{pmatrix} \theta_4 = \pi \\ \phi_4 = -\pi/2 \end{pmatrix}.$$

Dalle (5.0.24) seguono poi in particolare (e ancora con $\mathfrak{M}\, g = \rho k R$) le

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \;&=\; \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\, R^2 & \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\sin(\theta-\phi) \\ \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\sin(\theta-\phi) & \frac{13}{24}\,\mathfrak{M}\, r^2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{b} \;&=\; \begin{pmatrix} -(-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\,\cos\theta - kRr\,\sin(\theta-\phi) & +kRr\,\sin(\theta-\phi) \\ +kRr\,\sin(\theta-\phi) & -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\,\sin\phi - kRr\,\sin(\theta-\phi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.0.30}$$

ovvero

$$\boldsymbol{b} \;=\; kRr \begin{pmatrix} \beta(\rho-1)\,\cos\theta - \sin(\theta-\phi) & \sin(\theta-\phi) \\ \sin(\theta-\phi) & (1-\rho/6)\,\sin\phi - \sin(\theta-\phi) \end{pmatrix},$$

e nelle quattro posizioni dette si hanno le e nelle quattro posizioni dette si hanno le

$$\boldsymbol{b}_1 \;=\; kRr \begin{pmatrix} \beta(\rho-1)+1 & -1 \\ -1 & (1-\rho/6)+1 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 \;=\; kRr \begin{pmatrix} \beta(\rho-1)-1 & +1 \\ +1 & -(1-\rho/6)-1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\boldsymbol{b}_3 \;=\; kRr \begin{pmatrix} -\beta(\rho-1)-1 & +1 \\ +1 & (1-\rho/6)-1 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_4 \;=\; kRr \begin{pmatrix} -\beta(\rho-1)+1 & -1 \\ -1 & -(1-\rho/6)+1 \end{pmatrix}\,.$$

Queste, con $\rho = 1$ diventano

$$\boldsymbol{b}_1 \;=\; kRr \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 11/6 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 \;=\; kRr \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -11/6 \end{pmatrix}\,,$$

$$\boldsymbol{b}_3 \;=\; kRr \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1/6 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_4 \;=\; kRr \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1/6 \end{pmatrix}\,,$$

e se ne conclude che in tal caso la $\mathcal{C}_1 = (0,\, \pi/2)$ è l'unica posizione stabile.

<u>*Punto 2) bis*</u> Nella posizione $(\theta_1 = 0,\ \phi_1 = \pi/2)$ le equazioni linearizzate (5.0.26) diventano:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\, R^2\, \ddot\theta - \dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\, \ddot\phi \;=\; \big(\mathfrak{M}\, gR - kR^2 + kRr\big)\ \theta - kRr\ (\phi - \pi/2) \\ -\dfrac{1}{6}\, \mathfrak{M}\, Rr\ \ddot\theta + \dfrac{13}{24}\ \ \mathfrak{M}\, r^2\, \ddot\phi \;=\; -kRr\ \theta - (\mathfrak{M}\, g\, r/6 - kRr - kRr)\ (\phi - \pi/2) \end{cases}$$

che per $\rho = 1$ sono:

$$\begin{cases} 2\,\beta\, \dfrac{\mathfrak{M}}{k}\ \ddot\theta - \dfrac{1}{3}\ \dfrac{\mathfrak{M}}{k}\ \ddot\phi \;=\; 2\,\theta - 2\,(\phi - \pi/2) \\ -\dfrac{1}{3}\ \dfrac{\mathfrak{M}}{k}\ \ddot\theta + \dfrac{13}{24}\ \ \dfrac{\mathfrak{M}}{k}\ \ddot\phi \;=\; -2\,\theta - \dfrac{11}{3}\ (\phi - \pi/2) \end{cases}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-2\,\beta\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda & -2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda \\ -2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda & -\frac{11}{3}\ -\frac{13}{24}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda \end{pmatrix} \ =\ 0\ , \qquad \text{e cioè}$$

$$\left(\frac{13}{12}\,\beta\ -\frac{1}{9}\right)\,\frac{\mathfrak{M}^{\,2}}{k^2}\ \lambda^2-\left(\frac{13}{12}+\frac{22}{3}+\frac{4}{3}\right)\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda-\left(\frac{22}{3}+4\right)\ =\ 0\ ,$$

e gli autovettori sono allora le soluzioni delle

$$\begin{aligned}(2-2\,\beta\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda_1)\,\alpha_1+(-2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda_1)\ \beta_1\ &=\ 0\ ,\\ (2-2\,\beta\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda_2)\,\alpha_2+(-2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda_2)\ \beta_2\ &=\ 0\ ,\end{aligned}$$

da cui segue la relativa matrice di trasformazione $\boldsymbol{p}$. Con questa $\boldsymbol{p}$, e con le $\nu_{1,2} := \sqrt{\lambda_{1,2}}$, si calcolano le

$$\begin{pmatrix}\theta^{lin}(t)\\ \phi^{lin}(t)-\pi/2\end{pmatrix}=\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\cos\nu_1 t & 0\\ 0 & \cos\nu_2 t\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{-1}\ \begin{pmatrix}\theta_0\\ \phi_0-\pi/2\end{pmatrix}+\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu_1}\ \sin\nu_1 t & 0\\ 0 & \frac{1}{\nu_2}\ \sin\nu_2 t\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{-1}\ \begin{pmatrix}\dot\theta_0\\ \dot\phi_0\end{pmatrix}$$

<u>*Punto 3)*</u> Sussistono le equazioni cardinali:

$$\begin{cases}\mathfrak{M}\,\vec a_G\ =\ \mathfrak{M}\,\vec g-k\,\overrightarrow{DB}+\vec F^v\\ \dot{\vec K}^G\ =\ -\overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{GC}\times\vec F^v+\vec M^v_C\end{cases}\tag{5.0.31}$$

dalle quali ricavare, siccome i vincoli sono tutti senza attrito, che $F^v_z=0$ e che $\vec M^v_C$ è nulla. Poi, dovendo essere

$$\begin{cases}\vec F^v\times\overrightarrow{OC}\ =\ \left(\mathfrak{M}\,\vec a_G-\mathfrak{M}\,\vec g+k\,\overrightarrow{DB}\right)\times\overrightarrow{OC}\ =\ 0\\ \vec F^v\times\overrightarrow{CG}\ =\ \dot{\vec K}^G+\overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB}\end{cases}\tag{5.0.32}$$

dalle stesse (5.0.31) ne seguono le condizioni

$$\begin{cases} \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_x y_C \; - \; \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_y x_C \; = \; 0 \\ \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_x (y_G - y_C) - \left(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}\right)_y (x_G - x_C) \\ \quad = J_{G,\vec{e}_3}\ddot{\phi} + \frac{5}{6}\, r\vec{\varepsilon}_1 \times k\left((R\,\sin\theta + r\,\cos\phi)\,\vec{e}_1 - (R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\,\vec{e}_2\right)\cdot\vec{e}_3 \end{cases} \tag{5.0.33}$$

ovvero:

$$-\left(\mathfrak{M}\,\ddot{x}_G + kR\,\sin\theta + kr\,\cos\phi\right) R\,\cos\theta \;=\; \left(\mathfrak{M}\,\ddot{y}_G + \mathfrak{M}\,g - k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\right) R\,\sin\theta\;,$$

$$\left(\mathfrak{M}\,\ddot{x}_G + kR\,\sin\theta + kr\,\cos\phi\right)\frac{r}{6}\,\sin\phi - \left(\mathfrak{M}\,\ddot{y}_G + \mathfrak{M}\,g - k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\right)\frac{r}{6}\,\cos\phi$$
$$= \frac{37}{72}\,\mathfrak{M}\,r^2\ddot{\phi} - \frac{5}{6}\,kr\left((R\,\sin\theta + r\,\cos\phi)\,\sin\phi + (R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\,\cos\phi\right)\;,$$

o anche

$$\mathfrak{M}\,(\ddot{x}_G\,\cos\theta + \ddot{y}_G\,\sin\theta) \;=\; \left(-\mathfrak{M}\,g + k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\right) R\,\sin\theta$$
$$- (kR\sin\theta + kR\cos\phi)R\,\cos\theta\;,$$

$$\mathfrak{M}\,\frac{r}{6}\,(-\ddot{x}_G\,\sin\phi + \ddot{y}_G\,\cos\phi) + \left(\mathfrak{M}\,g - k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\right)\frac{r}{6}\,\cos\phi - (kR\sin\theta + kR\cos\phi)\frac{r}{6}\,\sin\phi$$
$$= -\frac{37}{72}\,\mathfrak{M}\,r^2\ddot{\phi} + \frac{5}{6}\,kr\,((R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\,\cos\phi + (R\sin\theta + R\cos\phi)\,\sin\phi)\;,$$

cioè

$$R\ddot\theta + \frac{r}{6}\ \left(\ddot\phi\ \sin(\theta-\phi) - \dot\phi^2\ \cos(\theta-\phi)\right) = \left(-\mathfrak{M}\, g + k(R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\right)\ R\,\sin\theta$$
$$- (kR\sin\theta + kR\cos\phi)R\,\cos\theta$$

$$R\ddot\theta\ \sin(\theta-\phi) + \cos^2\theta\ \cos(\theta-\phi) + \frac{r}{6}\ \ddot\phi - kR\left(\cos(\theta-\phi) + \frac{r}{6}\ \cos\phi\right)$$
$$= -\frac{37}{72}\ \mathfrak{M}\, r^2\ddot\phi + \frac{5}{6}\ kr\ \left((R + R\,\cos\theta - r\,\sin\phi)\ \cos\phi + (R\sin\theta + R\cos\phi)\ \sin\phi\right)\ ,$$

equazioni, queste, che coincidono con le (5.0.25) (provare per credere).

<u>*Punto 4)*</u> Dalle (5.0.31) si ricava allora $\vec F^v = \mathfrak{M}\,\vec a_G - \mathfrak{M}\,\vec g + k\,\overrightarrow{DB}$ con la quale è possibile calcolare la $\vec M^v_G = \vec M^v_C + \overrightarrow{GC}\times\vec F^v = \vec F^v\times\overrightarrow{CG}$. D'altra parte, per $\theta_0 = 0$ e $\phi_0 = 0$ si hanno

$$\left(\mathfrak{M}\,\vec a_G\right)_e = \mathfrak{M}\,R\begin{pmatrix}\ddot\theta\\ \dot\theta^2\end{pmatrix} + \mathfrak{M}\,\xi_G\ \begin{pmatrix}-\dot\phi^2\\ \ddot\phi\end{pmatrix},$$
$$\left(-\mathfrak{M}\,\vec g\right)_e = \begin{pmatrix}0\\ \mathfrak{M}\ g\end{pmatrix}, \qquad \left(k\ \overrightarrow{DB}\right)_e = k\ \begin{pmatrix}0\\ -2R\end{pmatrix}\ ,$$

e quindi se ne conclude che per tali valori si ha

$$\left(\vec F^v\right)_e = \begin{pmatrix}\mathfrak{M}\,R\,\ddot\theta\\ \mathfrak{M}\,R\,\dot\theta^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\mathfrak{M}\,\xi_G\,\dot\phi^2\\ \mathfrak{M}\,\xi_G\,\ddot\phi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \mathfrak{M}\ g\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k\,r\\ -2kR\end{pmatrix}.$$

A loro volta, i valori delle $\ddot\theta_0$ e $\ddot\phi_0$ si possono ricavare a partire dalle equazioni di Lagrange: (5.0.25). Infatti, per $\theta_0 = 0$ e $\phi_0 = 0$ quelle diventano:

$$\mathfrak{M}\,R^2\,\ddot\theta - \frac{1}{6}\ \mathfrak{M}\,Rr\,\dot\phi^2 = -k\,R\,r\ , \qquad \frac{13}{24}\ \mathfrak{M}\,r^2\ \ddot\phi + \frac{1}{6}\ \mathfrak{M}\,Rr\ \dot\theta^2 = -\frac{1}{6}\ \mathfrak{M}\,g\,r\ + 2k\,R\,r\ ,$$

e dunque $\ddot\theta_0 = 0$, e $\ddot\phi_0 = \dfrac{10}{6}\ \dfrac{24}{13}\ \dfrac{g}{r}$. Tramite queste si ricava la e dunque $\ddot\theta_0 = 0$, e $\ddot\phi_0 = \frac{10}{6}\,\frac{24}{13}\,\frac{g}{r}$. Tramite queste si ricava la

$$\left(\vec F^v\right)_e = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\,R\ddot\theta - \mathfrak{M}\,\xi_G\,\dot\phi^2 + k\,r \\ \mathfrak{M}\,R\dot\theta^2 + \mathfrak{M}\,\xi_G\ddot\phi + \mathfrak{M}\,g - 2k\,R \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta}\,\mathfrak{M}\,g + \frac{1}{\beta}\,k\,R \\ (\frac{20}{39}) + 2\mathfrak{M}\,g - 2kR \end{pmatrix},$$

e questa fornisce $\dot{\vec K}_G + \overrightarrow{GB} \times k\,\overrightarrow{DB} = \vec M^v_G = \vec F^v \times \overrightarrow{CG} = c\,\mathfrak{M}\,g\,r\,\vec e_3$ con $c = -\frac{20}{6\cdot 39}$.

<u>*Punto 5)*</u> L'imposizione dell'ulteriore vincolo $\theta = \theta^*$ assegna per la ϕ un'unica equazione, che si calcola specificando la seconda delle (5.0.25) nella

$$\frac{13}{24}\,\mathfrak{M}\,r^2\,\ddot\phi = -(\mathfrak{M}\,g\xi_G - kRr)\cos\phi + kRr\,\cos(\theta^* - \phi)$$
$$= (-\mathfrak{M}\,g\xi_G + kRr + kRr\cos\theta^*)\cos\phi + kRr\,\sin\theta^*\sin\phi\ .$$

Introducendo:

$$\delta^2 := (-\mathfrak{M}\,g\xi_G + kRr + kRr\cos\theta^*)^2 + (kRr\,\sin\theta^*)^2 =: c_1^2 + c_2^2\ , \quad \text{e} \quad \alpha \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} \cos\alpha := c_2/\delta \\ \sin\alpha := c_1/\delta \end{cases}$$

l'equazione diviene

$$\ddot\phi = \frac{72}{39}\,\frac{\delta}{\mathfrak{M}\,r^2}\,\sin(\phi+\alpha)\ ,$$

la quale, a seconda del valore della costante $\rho = \dfrac{\mathfrak{M}\,g}{kR}$, e sfruttando l'integrale primo:

$$\mathcal{E} := \frac{39}{36}\,\mathfrak{M}\,r^2\,\dot\phi^2 + \delta\,\cos(\phi+\alpha) = \mathcal{E}_0\ ,$$

si può discutere come quella di un pendolo semplice con punto di equilibrio stabile $\phi_e = -\alpha$ quando $\delta < 0$, e come quella di un pendolo inverso (cioè con la gravità verso l'alto invece che verso il basso e punto di equilibrio stabile $\phi_e = +\alpha$) quando $\delta > 0$; l'unico caso diverso è quello in cui $\delta = 0$, che è invece quello di una variazione lineare della ϕ a partire dalla α.