FISICA MATEMATICA (Ingegneria Civile)
V APPELLO (05.09.2018)   A.A.2017/18

COGNOME E NOME .... N.Ro MATR. ....
LUOGO E DATA DI NASCITA ....

Sia $\mathcal{R}$ un disco circolare rigido omogeneo pesante, di centro C massa $\mathcal{M}$ e raggio r, che presenta una cavità circolare di raggio $r/2$ e tangente internamente al bordo del disco stesso. Siano A il centro della cavità e ξ l'asse solidale, dato da $(C, vers\ \overrightarrow{AC})$.

Nello spazio terrestre supposto inerziale il corpo $\mathcal{R}$ è vincolato a muoversi su un piano verticale fisso rispetto a terra. Sia (x, y) tale piano, con y verticale e orientato verso l'alto.

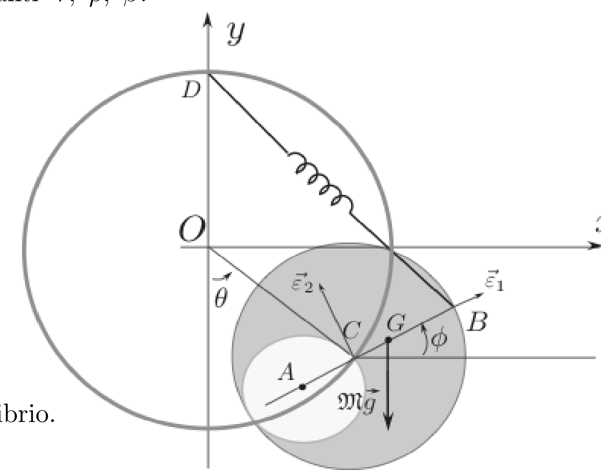
Il centro C del disco è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa nel piano (x, y), avente centro nell'origine O del sistema di riferimento e raggio $R =: \beta r$ con $\beta > 1$.

Sia θ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{OC}$ forma rispetto al versore $-\vec{e}_2$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$, sia B il punto fisso sul bordo del disco e di coordinate (relative) $(r, 0, 0)$, e sia ϕ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{CB}$ forma rispetto al versore $\vec{\varepsilon}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema, oltre ai pesi e alla sollecitazione vincolare, agisce una forza elastica, di costante elastica k, applicata al punto B e avente centro nel punto D del sistema di riferimento che ha coordinate $(0, R, 0)$.

Si assumano come coordinate lagrangiane le due anomalie θ e ϕ, si introduca la costante positiva ρ tale che $\mathcal{M}g =: \rho\, k\, R$, e si risolvano i seguenti punti usando le costanti r, ρ, β.



0) (*Facoltativo*) Dimostrare che sussistono le relazioni $\xi_G = r/6$, e $J_{G,\vec{e}_3} = \frac{37}{72}\ \mathcal{M}r^2$.

1) Esprimere le energie cinetica e potenziale del sistema e ricavarne le equazioni di Lagrange.

2) Determinare le condizioni di equilibrio;in particolare, studiare lastabilità degli equilibri che sono presenti quando $\mathcal{M}g = k\,R$. Mostrare poi che se $\mathcal{M}g \gg k\,R$, quelle già trovate risultano le uniche posizioni di equilibrio.

3) Scrivere le equazioni cardinali e (*facoltativo*) verificare le equazioni trovate nel Punto 1).

4) Ancora per $\mathcal{M}g = k\,R$, ricavare esplicitamente le espressioni globali $(\vec{F}^v, \vec{M}^v_G)$ della sollecitazione vincolare con la quale la guida agisce sul disco in un istante in cui si hanno $\left(\theta_0 = 0,\ \phi_0 = 0,\ \dot{\theta}_0 = \sqrt{g/R},\ \dot{\phi}_0 = \sqrt{6\,g/R}\right)$, e specificare il valore assunto, in tale istante, dalla costante c tale che $\vec{M}^v_G = c\,\mathcal{M}g\,r\,\vec{e}_3$.

5) Imponendo l'ulteriore vincolo $\theta = \theta^* \in (-\pi,\ \pi]$ discutere qualitativamente il moto al variare del parametro $\rho := \mathcal{M}g/kR$. Si suggerisce di affrontare tale studio introducendo la variabile $\phi + \alpha$ con α un'opportuna costante.

Riservato alla Commissione di Esame

SCRITTO ____

ORALE ____

Risoluzione

Punto 0) L'ascissa ξ_G del baricentro e il momento d'inerzia $J_{G,\vec{e}_3}$ del corpo $\mathfrak{R}$ sono conseguenze delle seguenti

$$0 \;=\; \mu\pi\frac{r^2}{4}\left(-\frac{r}{2}\right)+\mu\pi\left(r^2-\frac{r^2}{4}\right)\xi_G\;, \qquad \text{con} \quad \mu\pi\left(r^2-\frac{r^2}{4}\right) \;=\; \mathfrak{M}$$

$$\mu\pi\, r^2\,\frac{r^2}{2}-\mu\pi\,\frac{r^2}{4}\left(\frac{r^2/4}{2}+\frac{r^2}{4}\right) \;=\; \mathfrak{M}\,\xi_G^2+J_{G,\vec{e}_3}\;, \qquad \mathfrak{M}\,\xi_G \;=\; \mu\pi\,\frac{r^2}{4}\,\frac{r}{2}\;.$$

Pertanto $\mathfrak{M}\,\xi_G^2+J_{G,\vec{e}_3}=\dfrac{13}{8}\,\mu\pi\,r^2\,\dfrac{r^2}{4}$ e quindi, dato che $\mu\,\pi\,\dfrac{r^2}{4}=\dfrac{1}{3}\,\mathfrak{M}$, seguono $\xi_G=\dfrac{r}{6}$

e $J_{G,\vec{e}_3}=\mathfrak{M}\,r^2\left(\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{36}\right)=\dfrac{37}{72}\,\mathfrak{M}\,r^2$ insieme con $\mathfrak{M}\,\xi_G^2+J_{G,\vec{e}_3}=\dfrac{13}{24}\,\mathfrak{M}\,r^2$.

Punto 1) Sussistono le relazioni (nelle quali non verrà scritta la terza componente dei vettori se questi sono sul piano (x,y))

$$\left(\overrightarrow{OC}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}\;, \qquad \left(\vec{\varepsilon}_1\right)_e = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{CB}\right)_e = r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\;,$$

$$\left(\overrightarrow{OG}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}+\xi_G\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\;, \qquad \left(\overrightarrow{OB}\right)_e = R\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\;,$$

$$\left(\vec{v}_C\right)_e = R\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\;, \qquad \left(\vec{v}_G\right)_e = R\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\xi_G\,\dot\phi\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}\;,$$

$$\left(\vec{a}_C\right)_e = R\begin{pmatrix}\ddot\theta\,\cos\theta-\dot\theta^2\,\sin\theta\\ \ddot\theta\,\sin\theta+\dot\theta^2\,\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{BD}\right)_e = \begin{pmatrix}-R\,\sin\theta-r\,\cos\phi\\ R+R\cos\theta-r\,\sin\phi\end{pmatrix}\;,$$

$$\left(\vec{a}_G\right)_e = R\begin{pmatrix}\ddot\theta\,\cos\theta-\dot\theta^2\,\sin\theta\\ \ddot\theta\,\sin\theta+\dot\theta^2\,\cos\theta\end{pmatrix}+\xi_G\begin{pmatrix}-\ddot\phi\,\sin\phi-\dot\phi^2\,\cos\phi\\ \ddot\phi\,\cos\phi-\dot\phi^2\,\sin\phi\end{pmatrix}\;.$$

Di conseguenza si hanno le

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \;&=\; \mathfrak{M}\,g\,y_G+\frac{1}{2}\,k\,\Big((R\,\sin\theta+r\,\cos\phi)^2+(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)^2\Big)\\
&=\; \mathfrak{M}\,g\,(-R\cos\theta+\xi_G\sin\phi)+\frac{1}{2}\,k\,\left(2R(R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)+2Rr\,\sin(\theta-\phi)\right)+cost.\\
&= (-\mathfrak{M}\,gR+kR^2)\,\cos\theta+(\mathfrak{M}\,g\xi_G-kRr)\,\sin\phi+kRr\,\sin(\theta-\phi)+cost.\;,\\
\mathcal{T} \;&=\; \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,R^2\,\dot\theta^2+\frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,\xi_G^2\,\dot\phi^2+\mathfrak{M}\,R\xi_G\,\dot\phi\dot\theta\,\sin(\theta-\phi)+\frac{1}{2}\,J_{G,\vec{e}_3}\,\dot\phi^2\\
&=\; \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,R^2\,\dot\theta^2+\frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,r^2\,\frac{13}{24}\,\dot\phi^2+\frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\dot\phi\dot\theta\,\sin(\theta-\phi)\;,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} &= -(-\mathfrak{M}\,gR+kR^2)\,\sin\theta+kRr\,\cos(\theta-\phi)\\
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\phi} &= +(\mathfrak{M}\,g\xi_G-kRr)\,\cos\phi-kRr\,\cos(\theta-\phi)
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\theta} &= \mathfrak{M}\,R^2\,\dot\theta+\frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\dot\phi\,\sin(\theta-\phi)\\
\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot\phi} &= \frac{13}{24}\,\mathfrak{M}\,r^2\,\dot\phi+\frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\,Rr\,\dot\theta\,\sin(\theta-\phi)
\end{aligned}\right. \tag{5.0.23}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta^2} = -(-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\cos\theta - kRr\,\sin(\theta-\phi) \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^2} = -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\,\sin\phi - kRr\,\sin(\theta-\phi) \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta\partial\phi} = +kRr\,\sin(\theta-\phi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\theta^2} = \mathfrak{M}\, R^2 \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\phi^2} = \dfrac{13}{24}\,\mathfrak{M}\, r^2 \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot\theta\partial\dot\phi} = \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\sin(\theta-\phi) \\ \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\dot\phi\,\dot\theta\;\cos(\theta-\phi) \\ \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \phi} = -\dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\dot\phi\,\dot\theta\;\cos(\theta-\phi)\;. \end{cases} \tag{5.0.24}$$

Dalle (5.0.23) seguono anche le equazioni di Lagrange:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}_\theta & \begin{cases} \mathfrak{M}\, R^2\,\ddot\theta + \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\,\ddot\phi\,\sin(\theta-\phi) - \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\,\dot\phi^2\,\cos(\theta-\phi) \\ \qquad = (-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\,\sin\theta - kRr\,\cos(\theta-\phi) \\ \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\,\ddot\theta\,\sin(\theta-\phi) + \dfrac{13}{24}\,\mathfrak{M}\, r^2\,\ddot\phi + \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\,\dot\theta^2\,\cos(\theta-\phi) \\ \qquad = -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\,\cos\phi + kRr\,\cos(\theta-\phi) \end{cases} \\ \mathcal{L}_\phi & \end{array} \tag{5.0.25}$$

e (qualora fossero richieste) le loro linearizzate nella posizione (θ_e, ϕ_e):

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\, R^2\,\ddot\theta + \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\sin(\theta_e-\phi_e)\;\ddot\phi = \Big(-(-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\cos\theta_e - kRr\,\sin(\theta_e-\phi_e)\Big)\;(\theta-\theta_e) \\ \qquad + kRr\,\sin(\theta_e-\phi_e)\;(\phi-\phi_e) \\ \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\;\sin(\theta_e-\phi_e)\;\ddot\theta + \dfrac{13}{24}\;\mathfrak{M}\, r^2\,\ddot\phi = kRr\,\sin(\theta_e-\phi_e)\;(\theta-\theta_e) \\ \qquad - \Big((\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\,\sin\phi_e + kRr\,\sin(\theta_e-\phi_e)\Big)\;(\phi-\phi_e) \end{cases} \tag{5.0.26}$$

Punto 2) Dalle (5.0.25) si ricavano le condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} (-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\,\sin\theta - kRr\,\cos(\theta-\phi) = 0\;, \\ -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\,\cos\phi + kRr\,\cos(\theta-\phi) = 0\;, \end{cases} \tag{5.0.27}$$

che, con $\mathfrak{M}\, g =: \rho kR$ ed $R = \beta\; r$, forniscono le $\begin{cases} a\,\sin\theta = \cos(\theta-\phi)\;, \\ b\,\cos\phi = -\cos(\theta-\phi)\;, \end{cases}$ da cui

$$\begin{cases} a\,\sin\theta = -b\,\cos\phi\;, \\ a\,\sin\theta = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\;, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} a := \dfrac{k\,R^2 - \mathfrak{M}\, g\, R}{k\,R\,r} = \beta\,(1-\rho) \\ b := \dfrac{k\,R\,r - \mathfrak{M}\, g\,\xi_G}{k\,R\,r} = (1-\rho/6)\;, \end{cases} \tag{5.0.28}$$

ovvero, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$,

$$-\frac{a}{b}\;\cos\theta\sin\theta \pm \sin\theta\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}\;\sin^2\theta} = a\,\sin\theta\;; \tag{5.0.29}$$

ne segue che o è $\sin\theta = 0$ oppure

$$\pm\sqrt{b^2 - a^2 + a^2\;\cos^2\theta} = a\,b + a\;\cos\theta \qquad \text{che dà} \qquad 2a^2\,b\;\cos\theta = -(a^2b^2 + a^2 - b^2).$$

Pertanto, dato che è $\xi_G < r < R$, dalle (5.0.27) e (5.0.28) si hanno i seguenti casi:

1) $\mathfrak{M}\, g = k\,R$ che implica $a = 0$ e $b \neq 0$ con $\cos(\theta-\phi) = 0$ e quindi $\cos\phi = 0$ e $\sin\theta = 0$;

2) $\mathfrak{M}\, g\, \xi_G \;=\; k\, R^2$ e $a \neq 0\,,\;\; b = 0\,,$ che implica di nuovo $\cos(\theta-\phi)=0$ e quindi $\cos\phi = 0$ e $\sin\theta = 0$;

3) $a \neq 0$ e $b \neq 0\,,$ e le (5.0.28) e (5.0.29)implicano:

o che $\sin\theta = 0$ e dunque anche $\cos\phi = 0\,,$ oppure che

$$\cos\theta_e = -\,\frac{b^2(a^2-1)+a^2}{2a^2 b} \;=\; -\frac{b}{2}\,\left(1-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \;=:\; \chi\,, \qquad \text{purché sia} \qquad \chi \in [-1,+1].$$

È facile concludere che se $\rho\to\infty$ allora $a\to-\infty$ e $b\to-\infty\,,$ e quindi $\chi \to \chi_+ := +\infty\,.$

In definitiva, se $\mathfrak{M}\, g \;=\; k\, R\,,$ (e cioè $\rho = 1$), dalle (5.0.28) segue (come si è detto) $\cos(\theta-\phi)=0$ e quindi $\cos\phi = 0$. Pertanto $\sin\theta\sin\pi = 0$ da cui $\sin\theta = 0$, (e viceversa). Ne seguono quattro posizioni di equilibrio

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 = 0 \\ \phi_1 = +\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 = 0 \\ \phi_2 = -\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} \theta_3 = \pi \\ \phi_3 = +\pi/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C}_4 = \begin{pmatrix} \theta_4 = \pi \\ \phi_4 = -\pi/2 \end{pmatrix}.$$

Dalle (5.0.24) seguono poi in particolare (e ancora con $\mathfrak{M}\, g = \rho k R$) le

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \;&=\; \begin{pmatrix} \mathfrak{M}\, R^2 & \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\; \sin(\theta-\phi) \\ \frac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\; \sin(\theta-\phi) & \frac{13}{24}\,\mathfrak{M}\, r^2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{b} \;&=\; \begin{pmatrix} -(-\mathfrak{M}\, gR + kR^2)\cos\theta - kRr\,\sin(\theta-\phi) & +kRr\,\sin(\theta-\phi) \\ +kRr\,\sin(\theta-\phi) & -(\mathfrak{M}\, g\xi_G - kRr)\sin\phi - kRr\,\sin(\theta-\phi) \end{pmatrix}\,, \end{aligned} \tag{5.0.30}$$

ovvero

$$\boldsymbol{b} \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} \beta(\rho-1)\,\cos\theta - \sin(\theta-\phi) & \sin(\theta-\phi) \\ \sin(\theta-\phi) & (1-\rho/6)\,\sin\phi - \sin(\theta-\phi) \end{pmatrix}\,,$$

e nelle quattro posizioni dette si hanno le

$$\boldsymbol{b}_1 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} \beta(\rho-1)+1 & -1 \\ -1 & (1-\rho/6)+1 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} \beta(\rho-1)-1 & +1 \\ +1 & -(1-\rho/6)-1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\boldsymbol{b}_3 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} -\beta(\rho-1)-1 & +1 \\ +1 & (1-\rho/6)-1 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_4 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} -\beta(\rho-1)+1 & -1 \\ -1 & -(1-\rho/6)+1 \end{pmatrix}\,.$$

Queste, con $\rho = 1$ diventano

$$\boldsymbol{b}_1 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 11/6 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_2 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -11/6 \end{pmatrix}\,,$$

$$\boldsymbol{b}_3 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1/6 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b}_4 \;=\; kRr\,\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1/6 \end{pmatrix}\,,$$

e se ne conclude che in tal caso la $\mathcal{C}_1 = (0,\,\pi/2)$ è l'unica posizione stabile.

Punto 2) bis Nella posizione $(\theta_1 = 0,\; \phi_1 = \pi/2)$ le equazioni linearizzate (5.0.26) diventano:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\, R^2\,\ddot\theta - \dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\,\ddot\phi \;=\; \big(\mathfrak{M}\, gR - kR^2 + kRr\big)\;\theta - kRr\;(\phi-\pi/2) \\ -\dfrac{1}{6}\,\mathfrak{M}\, Rr\,\ddot\theta + \dfrac{13}{24}\,\mathfrak{M}\, r^2\,\ddot\phi \;=\; -kRr\;\theta - (\mathfrak{M}\, g\, r/6 - kRr - kRr)\;(\phi-\pi/2) \end{cases}$$

che per $\rho = 1$ sono:

$$\begin{cases} 2\,\beta\,\dfrac{\mathfrak{M}}{k}\,\ddot\theta - \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\mathfrak{M}}{k}\,\ddot\phi \;=\; 2\,\theta - 2\,(\phi-\pi/2) \\ -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{\mathfrak{M}}{k}\,\ddot\theta + \dfrac{13}{24}\,\dfrac{\mathfrak{M}}{k}\,\ddot\phi \;=\; -2\,\theta - \dfrac{11}{3}\,(\phi-\pi/2) \end{cases}$$

Per trovare i modi normali occorre quindi risolvere l'equazione

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2-2\beta\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda & -2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda \\ -2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda & -\frac{11}{3}\;-\frac{13}{24}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\,\lambda \end{pmatrix} \;=\; 0\;, \qquad \text{e cioè}$$

$$\left(\frac{13}{12}\,\beta\;-\frac{1}{9}\right)\,\frac{\mathfrak{M}^2}{k^2}\;\lambda^2-\left(\frac{13}{12}+\frac{22}{3}+\frac{4}{3}\right)\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\;\lambda-\left(\frac{22}{3}+4\right)\;=\;0\;,$$

e gli autovettori sono allora le soluzioni delle

$$\begin{aligned}
(2-2\,\beta\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\;\lambda_1)\,\alpha_1+(-2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\;\lambda_1)\;\beta_1 \;&=\; 0\;,\\
(2-2\,\beta\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\;\lambda_2)\,\alpha_2+(-2+\frac{1}{3}\,\frac{\mathfrak{M}}{k}\;\lambda_2)\;\beta_2 \;&=\; 0\;,
\end{aligned}$$

da cui segue la relativa matrice di trasformazione $\boldsymbol{p}$. Con questa $\boldsymbol{p}$, e con le $\nu_{1,2} := \sqrt{\lambda_{1,2}}$, si calcolano le

$$\begin{pmatrix}\theta^{lin}(t)\\ \phi^{lin}(t)-\pi/2\end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\cos\nu_1 t & 0\\ 0 & \cos\nu_2 t\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{-1}\;\begin{pmatrix}\theta_0\\ \phi_0-\pi/2\end{pmatrix} + \boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu_1}\;\sin\nu_1 t & 0\\ 0 & \frac{1}{\nu_2}\;\sin\nu_2 t\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^{-1}\;\begin{pmatrix}\dot\theta_0\\ \dot\phi_0\end{pmatrix}$$

Punto 3) Sussistono le equazioni cardinali:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\,\vec a_G \;=\; \mathfrak{M}\,\vec g - k\,\overrightarrow{DB}+\vec F^v \\ \dot{\vec K}^G \;=\; -\overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{GC}\times\vec F^v+\vec M^v_C \end{cases} \tag{5.0.31}$$

dalle quali ricavare, siccome i vincoli sono tutti senza attrito, che $F^v_z=0$ e che $\vec M^v_C$ è nulla. Poi, dovendo essere

$$\begin{cases} \vec F^v\times\overrightarrow{OC} \;=\; \left(\mathfrak{M}\,\vec a_G-\mathfrak{M}\,\vec g+k\,\overrightarrow{DB}\right)\times\overrightarrow{OC}\;=\;0 \\ \vec F^v\times\overrightarrow{CG} \;=\; \dot{\vec K}^G+\overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB} \end{cases} \tag{5.0.32}$$

dalle stesse (5.0.31) ne seguono le condizioni

$$\begin{cases} \left(\mathfrak{M}\,\vec a_G-\mathfrak{M}\,\vec g+k\,\overrightarrow{DB}\right)_x y_C \;-\;\left(\mathfrak{M}\,\vec a_G-\mathfrak{M}\,\vec g+k\,\overrightarrow{DB}\right)_y x_C \;=\;0 \\ \left(\mathfrak{M}\,\vec a_G-\mathfrak{M}\,\vec g+k\,\overrightarrow{DB}\right)_x (y_G-y_C)-\left(\mathfrak{M}\,\vec a_G-\mathfrak{M}\,\vec g+k\,\overrightarrow{DB}\right)_y (x_G-x_C) \\ \qquad =\; J_{G,\vec e_3}\ddot\phi+\frac{5}{6}\;r\vec\varepsilon_1\times k\left((R\,\sin\theta+r\,\cos\phi)\,\vec e_1-(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\,\vec e_2\right)\cdot\vec e_3 \end{cases} \tag{5.0.33}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
-\left(\mathfrak{M}\,\ddot x_G+kR\,\sin\theta+kr\,\cos\phi\right)\;R\;\cos\theta \;&=\;\left(\mathfrak{M}\,\ddot y_G+\mathfrak{M}\,g-k(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\right)\;R\,\sin\theta\;,\\
\left(\mathfrak{M}\,\ddot x_G+kR\,\sin\theta+kr\,\cos\phi\right)\frac{r}{6}\;\sin\phi-&\;\left(\mathfrak{M}\,\ddot y_G+\mathfrak{M}\,g-k(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\right)\;\frac{r}{6}\;\cos\phi\\
&=\;\frac{37}{72}\;\mathfrak{M}\,r^2\ddot\phi-\frac{5}{6}\;kr\;\left((R\,\sin\theta+r\,\cos\phi)\,\sin\phi+(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\,\cos\phi\right)\;,
\end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}\;(\ddot x_G\;\cos\theta+\ddot y_G\;\sin\theta)\;&=\;\left(-\mathfrak{M}\,g+k(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\right)\;R\,\sin\theta\\
&\quad-(kR\sin\theta+kR\cos\phi)R\,\cos\theta\;,\\
\mathfrak{M}\,\frac{r}{6}\,(-\ddot x_G\;\sin\phi+\ddot y_G\;\cos\phi)+&\left(\mathfrak{M}\,g-k(R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\right)\frac{r}{6}\;\cos\phi-(kR\sin\theta+kR\cos\phi)\frac{r}{6}\;\sin\phi\\
&=\;-\frac{37}{72}\;\mathfrak{M}\,r^2\ddot\phi+\frac{5}{6}\;kr\;\left((R+R\,\cos\theta-r\,\sin\phi)\;\cos\phi+(R\sin\theta+R\cos\phi)\;\sin\phi\right)\;,
\end{aligned}$$

cioè

$$R\ddot{\theta} + \frac{r}{6}\ \Big(\ddot{\phi}\ \sin(\theta-\phi) - \dot{\phi}^2\ \cos(\theta-\phi)\Big) = \Big(-\mathfrak{M}\, g + k(R + R\ \cos\theta - r\ \sin\phi)\Big)\ R\sin\theta$$
$$-\ (kR\sin\theta + kR\cos\phi)R\ \cos\theta$$
$$R\ddot{\theta}\ \sin(\theta-\phi) + \cos^2\theta\ \cos(\theta-\phi) + \frac{r}{6}\ \ddot{\phi} - kR\Big(\cos(\theta-\phi) + \frac{r}{6}\ \cos\phi\Big)$$
$$= -\frac{37}{72}\ \mathfrak{M}\, r^2\ddot{\phi} + \frac{5}{6}\ kr\ \left((R + R\ \cos\theta - r\ \sin\phi)\ \cos\phi + (R\sin\theta + R\cos\phi)\ \sin\phi\right)\ ,$$

equazioni, queste, che coincidono con le (5.0.25) (provare per credere).

<u>Punto 4)</u> Dalle (5.0.31) si ricava allora $\vec{F}^v = \mathfrak{M}\,\vec{a}_G - \mathfrak{M}\,\vec{g} + k\,\overrightarrow{DB}$ con la quale è possibile calcolare la $\vec{M}^v_G = \vec{M}^v_C + \overrightarrow{GC}\times\vec{F}^v = \vec{F}^v\times\overrightarrow{CG}$. D'altra parte, per $\theta_0 = 0$ e $\phi_0 = 0$ si hanno

$$\Big(\mathfrak{M}\,\vec{a}_G\Big)_e = \mathfrak{M}\,R\begin{pmatrix}\ddot{\theta}\\ \dot{\theta}^2\end{pmatrix} + \mathfrak{M}\,\xi_G\ \begin{pmatrix}-\dot{\phi}^2\\ \ddot{\phi}\end{pmatrix},$$
$$\Big(-\mathfrak{M}\,\vec{g}\Big)_e = \begin{pmatrix}0\\ \mathfrak{M}\ g\end{pmatrix}, \qquad \Big(k\ \overrightarrow{DB}\Big)_e = k\ \begin{pmatrix}0\\ -2R\end{pmatrix}\ ,$$

e quindi se ne conclude che per tali valori si ha

$$\Big(\vec{F}^v\Big)_e = \begin{pmatrix}\mathfrak{M}\,R\,\ddot{\theta}\\ \mathfrak{M}\,R\,\dot{\theta}^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\mathfrak{M}\,\xi_G\,\dot{\phi}^2\\ \mathfrak{M}\,\xi_G\,\ddot{\phi}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \mathfrak{M}\ g\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k\,r\\ -2kR\end{pmatrix}.$$

A loro volta, i valori delle $\ddot{\theta}_0$ e $\ddot{\phi}_0$ si possono ricavare a partire dalle equazioni di Lagrange: (5.0.25). Infatti, per $\theta_0 = 0$ e $\phi_0 = 0$ quelle diventano:

$$\mathfrak{M}\,R^2\,\ddot{\theta} - \frac{1}{6}\ \mathfrak{M}\,Rr\,\dot{\phi}^2 = -k\,R\,r\ , \qquad \frac{13}{24}\ \mathfrak{M}\,r^2\ \ddot{\phi} + \frac{1}{6}\ \mathfrak{M}\,Rr\ \dot{\theta}^2 = -\frac{1}{6}\ \mathfrak{M}\,g\,r\ + 2k\,R\,r\ ,$$

e dunque $\ddot{\theta}_0 = 0$, e $\ddot{\phi}_0 = \dfrac{10}{6}\ \dfrac{24}{13}\ \dfrac{g}{r}$. Tramite queste si ricava la

$$\Big(\vec{F}^v\Big)_e = \begin{pmatrix}\mathfrak{M}\,R\,\ddot{\theta}\ - \mathfrak{M}\,\xi_G\,\dot{\phi}^2 + k\,r\\ \mathfrak{M}\,R\,\dot{\theta}^2 + \mathfrak{M}\,\xi_G\ddot{\phi} + \mathfrak{M}\,g - 2k\,R\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\beta}\ \mathfrak{M}\,g + \frac{1}{\beta}\ k\,R\\ (\frac{20}{39}) + 2\mathfrak{M}\,g\ - 2kR\end{pmatrix},$$

e questa fornisce $\dot{\vec{K}}_G + \overrightarrow{GB}\times k\,\overrightarrow{DB} = \vec{M}^v_G = \vec{F}^v\times\overrightarrow{CG} = c\ \mathfrak{M}\ g\,r\ \vec{e}_3$ con $c = -\frac{20}{6\cdot 39}$.

<u>Punto 5)</u> L'imposizione dell'ulteriore vincolo $\theta = \theta^*$ assegna per la ϕ un'unica equazione, che si calcola specificando la seconda delle (5.0.25) nella

$$\frac{13}{24}\ \mathfrak{M}\,r^2\ \ddot{\phi} = -(\mathfrak{M}\,g\xi_G - kRr)\ \cos\phi + kRr\ \cos(\theta^* - \phi)$$
$$= (-\mathfrak{M}\,g\xi_G + kRr + kRr\cos\theta^*)\ \cos\phi + kRr\ \sin\theta^*\sin\phi\ .$$

Introducendo:

$$\delta^2 := (-\mathfrak{M}\,g\xi_G + kRr + kRr\cos\theta^*)^2 + (kRr\ \sin\theta^*)^2 =:\ c_1^2 + c_2^2\ , \quad \text{e}\ \ \alpha\ \ \text{tale che}\quad \begin{cases}\cos\alpha := c_2/\delta\\ \sin\alpha := c_1/\delta\end{cases}$$

l'equazione diviene

$$\ddot{\phi} = \frac{72}{39}\ \frac{\delta}{\mathfrak{M}\,r^2}\ \sin(\phi+\alpha)\ ,$$

la quale, a seconda del valore della costante $\rho = \dfrac{\mathfrak{M}\,g}{kR}$, e sfruttando l'integrale primo:

$$\mathcal{E} := \frac{39}{36}\ \mathfrak{M}\,r^2\,\dot{\phi}^2 +\ \delta\ \cos(\phi+\alpha) = \mathcal{E}_0\ ,$$

si può discutere come quella di un pendolo semplice con punto di equilibrio stabile $\phi_e = -\alpha$ quando $\delta < 0$, e come quella di un pendolo inverso (cioè con la gravità verso l'alto invece che verso il basso e punto di equilibrio stabile $\phi_e = +\alpha$) quando $\delta > 0$; l'unico caso diverso è quello in cui $\delta = 0$, che è invece quello di una variazione lineare della ϕ a partire dalla α.