FISICA MATEMATICA (Ingegneria Civile)
V APPELLO (05.09.2018) A.A.2017/18

COGNOME E NOME .... N.Ro MATR. ....
LUOGO E DATA DI NASCITA ....

Sia $\mathcal{R}$ un disco circolare rigido omogeneo pesante, di centro C massa $\mathcal{M}$ e raggio r, che presenta una cavità circolare di raggio $r/2$ e tangente internamente al bordo del disco stesso. Siano A il centro della cavità e ξ l'asse solidale, dato da $(C, vers\ \overrightarrow{AC})$.

Nello spazio terrestre supposto inerziale il corpo $\mathcal{R}$ è vincolato a muoversi su un piano verticale fisso rispetto a terra. Sia (x, y) tale piano, con y verticale e orientato verso l'alto.

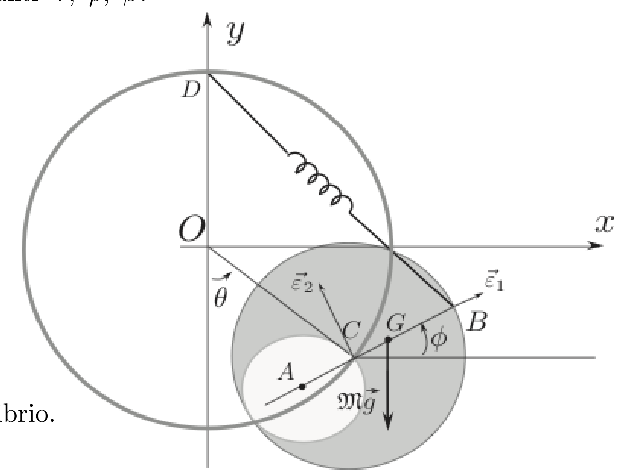
Il centro C del disco è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa nel piano (x, y), avente centro nell'origine O del sistema di riferimento e raggio $R =: \beta r$ con $\beta > 1$.

Sia θ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{OC}$ forma rispetto al versore $-\vec{e}_2$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$, sia B il punto fisso sul bordo del disco e di coordinate (relative) $(r, 0, 0)$, e sia ϕ l'anomalia che il vettore $\overrightarrow{CB}$ forma rispetto al versore $\vec{e}_1$ contata positivamente nel verso antiorario rispetto a $\vec{e}_3$.

Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.

Sul sistema, oltre ai pesi e alla sollecitazione vincolare, agisce una forza elastica, di costante elastica k, applicata al punto B e avente centro nel punto D del sistema di riferimento che ha coordinate $(0, R, 0)$.

Si assumano come coordinate lagrangiane le due anomalie θ e ϕ, si introduca la costante positiva ρ tale che $\mathcal{M}g =: \rho\, k\, R$, e si risolvano i seguenti punti usando le costanti r, ρ, β.



0) (*Facoltativo*) Dimostrare che sussistono le relazioni $\xi_G = r/6$, e $J_{G,\vec{e}_3} = \frac{37}{72}\, \mathcal{M} r^2$.

1) Esprimere le energie cinetica e potenziale del sistema e ricavarne le equazioni di Lagrange.

2) Determinare le condizioni di equilibrio;in particolare, studiare lastabilità degli equilibri che sono presenti quando $\mathcal{M}g = k\,R$. Mostrare poi che se $\mathcal{M}g \gg k\,R$, quelle già trovate risultano le uniche posizioni di equilibrio.

3) Scrivere le equazioni cardinali e (*facoltativo*) verificare le equazioni trovate nel Punto 1).

4) Ancora per $\mathcal{M}g = k\,R$, ricavare esplicitamente le espressioni globali $(\vec{F}^v, \vec{M}^v_G)$ della sollecitazione vincolare con la quale la guida agisce sul disco in un istante in cui si hanno $\left(\theta_0 = 0,\ \phi_0 = 0,\ \dot\theta_0 = \sqrt{g/R},\ \dot\phi_0 = \sqrt{6\,g/R}\right)$, e specificare il valore assunto, in tale istante, dalla costante c tale che $\vec{M}^v_G = c\,\mathcal{M} g\, r\, \vec{e}_3$.

5) Imponendo l'ulteriore vincolo $\theta = \theta^* \in (-\pi, \pi]$ discutere qualitativamente il moto al variare del parametro $\rho := \mathcal{M}g/kR$. Si suggerisce di affrontare tale studio introducendo la variabile $\phi + \alpha$ con α un'opportuna costante.

Riservato alla Commissione di Esame

SCRITTO ____

____

____

ORALE ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____