



Complementi di Fisica - X Lezione

Soluzione degli esercizi 3, 5 e 10
della V prova di autovalutazione

Soluzione degli esercizi 4, 7 e 8
della VI prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

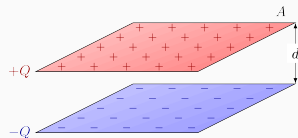
30 aprile 2025

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Soluzione degli esercizi 3, 5 e 10 della V prova di autovalutazione

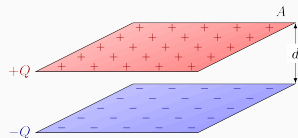
Esercizio 3

Quanto è intenso il campo elettrico fra le armature di un condensatore piano della capacità di $0,80\ \mu\text{F}$ se queste sono distanti $2\ \text{mm}$ e ciascuna porta una carica $92\ \mu\text{C}$? (Si supponga vi sia aria tra le armature.)



Esercizio 3

Quanto è intenso il campo elettrico fra le armature di un condensatore piano della capacità di $0,80 \mu\text{F}$ se queste sono distanti 2 mm e ciascuna porta una carica $92 \mu\text{C}$? (Si supponga vi sia aria tra le armature.)



Poiché si ha un condensatore piano, si può ricavare l'area A della superficie della armature:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow A = \frac{Cd}{\epsilon_0}.$$

Poiché la densità areica di carica sulle armature è:

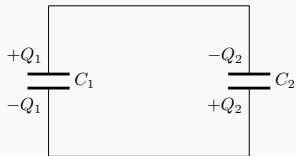
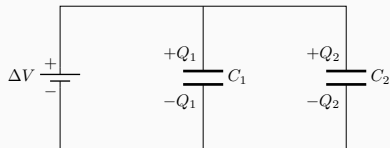
$$\sigma = \frac{Q}{A} = q \frac{\epsilon_0}{Cd};$$

ne consegue che il campo elettrico tra le armature ha intensità

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{Cd} = 5,8 \times 10^4 \text{ V/m}.$$

Esercizio 5

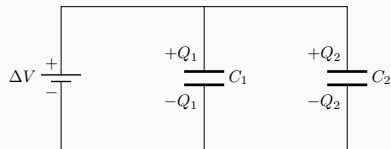
Due condensatori $C_1 = 2,2 \mu\text{F}$ e $C_2 = 1,2 \mu\text{F}$ sono collegati in parallelo a una sorgente di tensione di $\Delta V = 24 \text{ V}$. Dopo essere stati caricati vengono scollegati dalla sorgente, separati l'uno dall'altro e, successivamente, ricollegati con le armature di segno opposto collegate. Si determini la carica e la tensione di ciascun condensatore dopo che è stato raggiunto l'equilibrio elettrico.



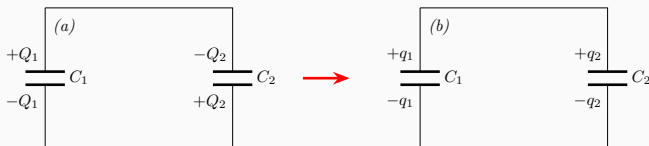
La carica iniziale sui due condensatori è:

$$Q_1 = C_1 \Delta V = 52,8 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V = 28,8 \mu\text{C}$$

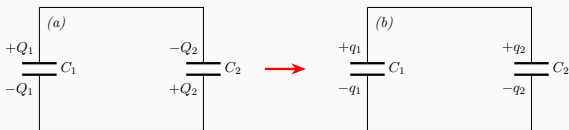


Dopo il ricollegamento, al raggiungimento dell'equilibrio elettrostatico, ai capi dei condensatori c'è la stessa differenza di potenziale $\Delta V' \neq \Delta V$ perché diversa sarà la carica sulle armature.



(a) Distribuzione delle cariche subito dopo il ricollegamento dei condensatori: ai loro capi vi è ΔV ;

(b) Distribuzione delle cariche a equilibrio elettrostatico raggiunto: ai capi dei condensatori vi è $\Delta V'$



All'equilibrio si deve quindi avere la **stessa differenza di potenziale ai capi dei condensatori**:

$$q_1 = C_1 \Delta V' \qquad q_2 = C_2 \Delta V'$$

e la **carica totale sulle armature nella situazione (a) e (b) deve essere la stessa**; ad esempio, per le armature superiori

$$Q_1 - Q_2 = q_1 + q_2 = 24,0 \mu\text{C}.$$

Poiché la capacità totale del sistema è $C_1 + C_2$, allora:

$$\Delta V' = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \simeq 7,1 \text{ V}; \quad q_1 = C_1 \Delta V' \simeq 16,0 \mu\text{C}; \quad q_2 = C_2 \Delta V' \simeq 8,0 \mu\text{C}.$$

Esercizio 10

Un condensatore piano della capacità di $C = 60 \mu\text{F}$ e con le armature distanti $d_1 = 2,0 \text{ mm}$ viene collegato a una batteria avente una differenza di potenziale $V_1 = 12 \text{ V}$ tra i suoi poli.

Successivamente la pila viene rimossa e le armature del condensatore vengono allontanate fino a una distanza $d_2 = 3,5 \text{ mm}$.

(a) Qual è la carica del condensatore? (b) Qual è l'energia iniziale e finale immagazzinata nel condensatore?

Esercizio 10

Un condensatore piano della capacità di $C = 60 \mu\text{F}$ e con le armature distanti $d_1 = 2,0 \text{ mm}$ viene collegato a una batteria avente una differenza di potenziale $V_1 = 12 \text{ V}$ tra i suoi poli.

Successivamente la pila viene rimossa e le armature del condensatore vengono allontanate fino a una distanza $d_2 = 3,5 \text{ mm}$.

(a) Qual è la carica del condensatore? (b) Qual è l'energia iniziale e finale immagazzinata nel condensatore?

(a) La carica sulle armature del condensatore è:

$$Q = CV_1 = (60 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 720 \mu\text{C}.$$

(b) L'energia iniziale del condensatore è:

$$U_{\text{iniz}} = \frac{1}{2}QV_1 = \frac{1}{2}(720 \mu\text{C})(12 \text{ V}) = 4320 \mu\text{J}.$$

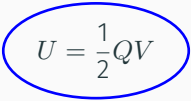
Alternativamente, l'energia può essere espressa nella forma

$$U_{\text{iniz}} = \frac{1}{2} C V_1^2 = (60 \mu\text{F})(12 \text{V})^2 = 4320 \mu\text{J}.$$

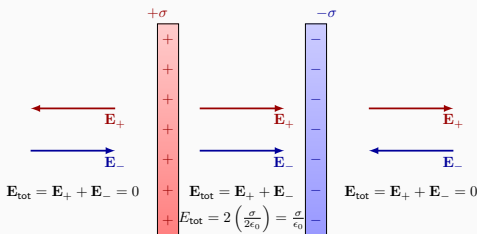
Quando il condensatore viene staccato dalla batteria, la carica sulle armature deve rimanere costante.

Allontanando le armature, la capacità del condensatore diminuisce. Poiché $C = Q/V$, se C diminuisce e Q rimane costante ne deriva che l'allontanamento delle armature aumenta la differenza di potenziale V esistente tra esse!

L'allontanamento delle armature del condensatore non connesse alla batteria fa aumentare l'energia immagazzinata:


$$U = \frac{1}{2} QV$$

Per trovare l'energia immagazzinata nel condensatore quando la distanza tra le armature è $d_2 = 3,5 \text{ mm}$ occorre determinare la differenza di potenziale tra le armature in questa condizione.



Il campo elettrico tra le armature è uniforme e non varia con il loro allontanamento (σ è costante!)

$$V_1 = Ed_1$$

$$V_2 = Ed_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{d_2}{d_1} = 21 \text{ V.}$$

E quindi

$$U_{\text{fin}} = \frac{1}{2} Q V_2 = 7560 \mu\text{J} \Rightarrow U_{\text{fin}} - U_{\text{iniz}} = 3240 \mu\text{J}.$$

Per il principio di conservazione dell'energia, l'incremento di energia immagazzinata deve essere pari al lavoro fatto dall'esterno per allontanare le armature! Proviamo a calcolarlo.

Supponiamo di tenere ferma l'armatura positiva e di allontanare quella negativa. **La forza di Coulomb quando si allontana l'armatura negativa fa un lavoro negativo (perché?)**; poiché il campo è uniforme, tale lavoro è espresso da:

$$L_C = -F_C(d_2 - d_1) = -Q \frac{E}{2}(d_2 - d_1)$$

essendo E il campo elettrico creato da *entrambe* le armature.

$$E = \frac{V_1}{d_1} = \frac{12 \text{ V}}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 6 \text{ kV/m}$$

da cui

$$L_C = (-720 \mu\text{C})(3 \text{ kV/m})(1,5 \text{ mm}) = -3240 \mu\text{J}.$$

Il lavoro fatto dall'esterno è pari a $-L_C$ (perché?) cosicché il lavoro fatto dall'esterno è esattamente uguale all'incremento dell'energia immagazzinata nel condensatore.

Soluzione degli esercizi 4, 7 e 8 della VI prova di autovalutazione

Esercizio 4

Si calcoli la caduta di potenziale che si verifica agli estremi di un filo di rame della lunghezza di 21 m e del diametro di 1,628 mm nel quale scorre una corrente di 12 A. (Resistività del rame: $1,68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$).

Esercizio 4

Si calcoli la caduta di potenziale che si verifica agli estremi di un filo di rame della lunghezza di 21 m e del diametro di 1,628 mm nel quale scorre una corrente di 12 A. (Resistività del rame: $1,68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$).

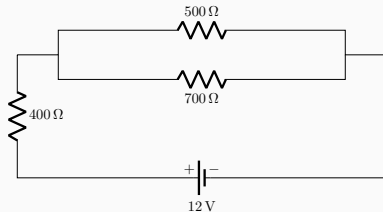
Dalla legge di Ohm e dall'espressione della resistività di un conduttore filiforme si ha:

$$V = IR = I\rho \frac{\ell}{A} = (12 \text{ A})(1,68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) \frac{21 \text{ m}}{\pi \left(\frac{1,628 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} \right)^2}.$$

Si ricava: $V = 2,0 \text{ V}$.

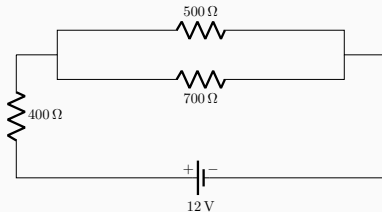
Esercizio 7

Considerando il circuito della figura, (a) Quanta corrente eroga la batteria? (b) Qual è l'intensità della corrente che scorre nelle resistenze da 500 e 700 Ω ?



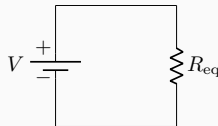
Esercizio 7

Considerando il circuito della figura, (a) Quanta corrente eroga la batteria? (b) Qual è l'intensità della corrente che scorre nelle resistenze da 500 e 700 Ω ?

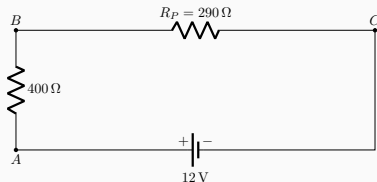
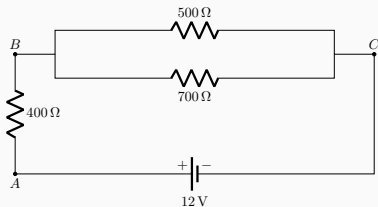


Per rispondere alla prima domanda è necessario semplificare il circuito riducendo l'insieme delle resistenze a un'unica resistenza equivalente R_{eq} , cosicchè dalla legge di Ohm si ha:

$$I = \frac{V}{R_{eq}}.$$



Semplificazione del circuito - Circuito equivalente

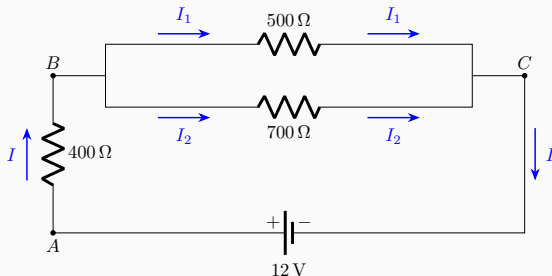


$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{500\Omega} + \frac{1}{700\Omega} = 0,0034\Omega^{-1} \Rightarrow R_P = 290\Omega.$$

$$R_{eq} = 290\Omega + 400\Omega = 690\Omega.$$

Per la legge di Ohm la corrente erogata dalla batteria è:

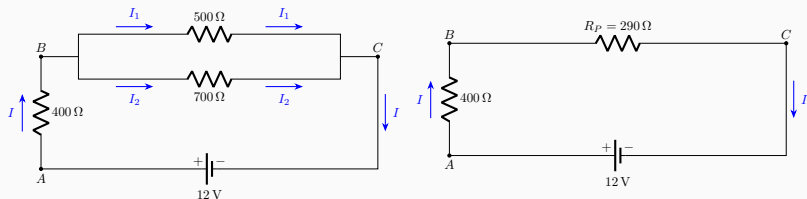
$$I = \frac{V}{R_{eq}} = 0,0174\text{ A} \simeq 17\text{ mA}.$$



La corrente che scorre nelle due resistenze da 500 e 700 Ω non è la stessa. Le due resistenze hanno la medesima differenza di potenziale ai loro capi ($V_B - V_C$) ma, per la legge di Ohm, avendo resistenza diversa, sono percorse da correnti diverse. Ovviamente deve essere

$$I_1 + I_2 = I$$

Per la determinazione di I_1 e I_2 occorre conoscere $V_B - V_C$ che si ottiene dal circuito equivalente tramite la legge Ohm.



$$V_B - V_C = IR_P = (0,0174 \text{ A})(290 \Omega) = 5 \text{ V}.$$

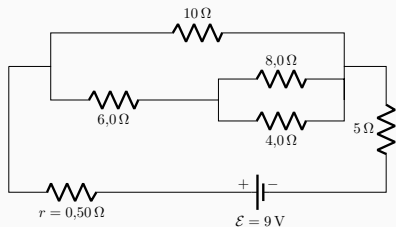
$$I_1 = \frac{5 \text{ V}}{500 \Omega} = 10 \text{ mA}$$

e

$$I_2 = \frac{5 \text{ V}}{700 \Omega} = 7 \text{ mA}.$$

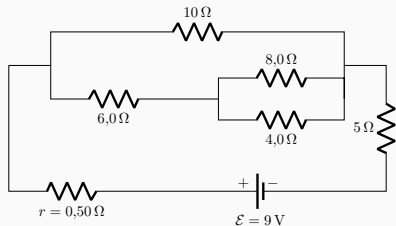
Esercizio 8

Una batteria da 9 V e di resistenza interna $r = 0,5\Omega$ viene usata per alimentare il circuito mostrato in figura. (a) Quanta corrente viene erogata dalla batteria? (b) Qual è la tensione tra i morsetti della batteria? (c) Qual è l'intensità della corrente che scorre nel resistore da 6Ω ?

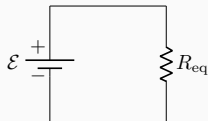


Esercizio 8

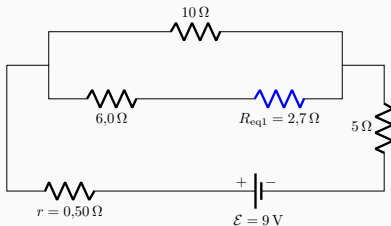
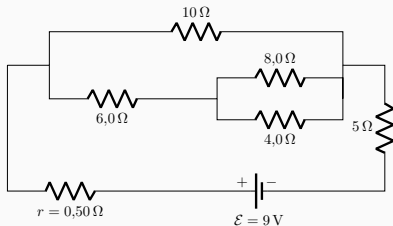
Una batteria da 9 V e di resistenza interna $r = 0,5\,\Omega$ viene usata per alimentare il circuito mostrato in figura. (a) Quanta corrente viene erogata dalla batteria? (b) Qual è la tensione tra i morsetti della batteria? (c) Qual è l'intensità della corrente che scorre nel resistore da $6\,\Omega$?



Come nell'esercizio precedente, per rispondere alla prima domanda è necessario semplificare il circuito riducendo l'insieme delle resistenze a un'unica resistenza equivalente R_{eq} .

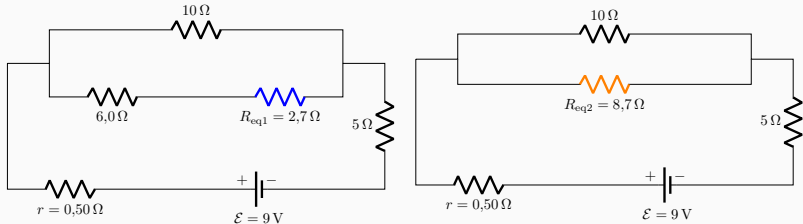


Prima semplificazione del circuito



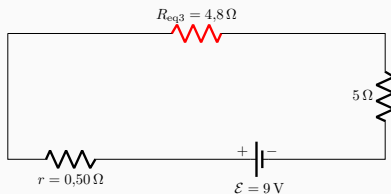
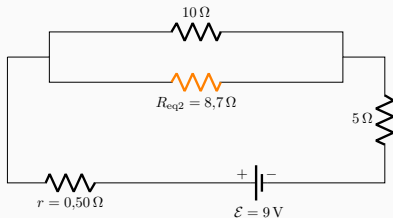
$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{8,0\ \Omega} + \frac{1}{4,0\ \Omega} = \frac{3}{8\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_{eq1} = 2,7\ \Omega.$$

Seconda semplificazione del circuito



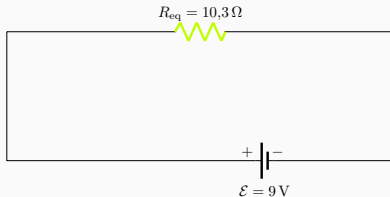
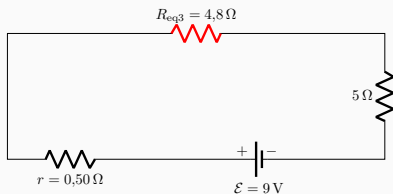
$$R_{\text{eq2}} = 6\ \Omega + 2,7\ \Omega = 8,7\ \Omega.$$

Terza semplificazione del circuito



$$\frac{1}{R_{eq3}} = \frac{1}{10,0\,\Omega} + \frac{1}{8,7\,\Omega} = 0,21\,\Omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{eq3} = 4,8\,\Omega.$$

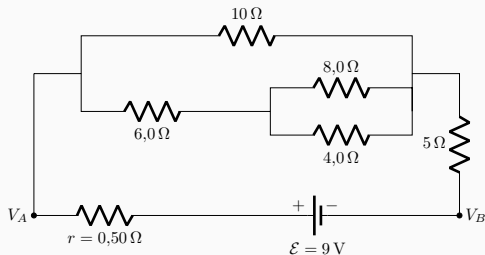
Ultima semplificazione del circuito



$$R_{eq} = 4,8\ \Omega + 5,0\ \Omega + 0,5\ \Omega = 10,3\ \Omega.$$

Per la legge di Ohm, la corrente che scorre nel circuito è:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = 0,87\text{ A}.$$



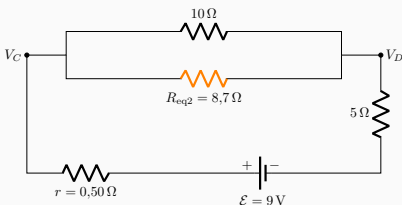
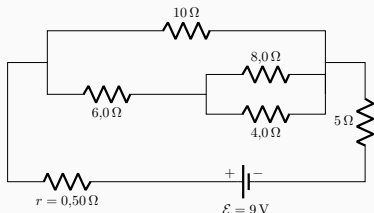
(b) Per calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B , considerando che la corrente circola nel circuito in senso orario. si può andare dal punto B al punto A passando attraverso la f.e.m. ($I > 0$):

$$V_B - V_A + \mathcal{E} = Ir$$

e quindi

$$V_B - V_A = -\mathcal{E} + Ir = -9\text{ V} + (0,87\text{ A})(0,5\ \Omega) = -8,6\text{ V}.$$

(c) La corrente I' che scorre nella resistenza da $6,0\ \Omega$ è la stessa che scorre in R_{eq2}



Considerando che la corrente scorre nel circuito in senso orario, andando dal punto D al punto C passando attraverso la f.e.m. ($I > 0$) si ha:

$$(V_D - V_C) + 9,0\text{ V} = (0,87\text{ A})(0,5\ \Omega + 5\ \Omega) = -4,2\text{ V} \quad \Rightarrow \quad V_C - V_D = 4,2\text{ V}$$

e quindi

$$I' = \frac{4,2\text{ V}}{8,7\ \Omega} = 0,48\text{ A}.$$