

Complementi di Fisica - XI Lezione

Circuiti in serie

Circuiti RC: carica e scarica di un condensatore

Il campo magnetico

La forza esercitata sulle cariche dal campo magnetico

Andrea Bettucci

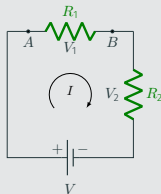
30 aprile 2025

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Circuiti in serie

Circuiti in serie

- In un circuito in serie la stessa corrente attraversa tutti gli elementi del circuito.
- Tutti gli elementi circuitali sono collegati in modo che il terminale di uscita della corrente da uno sia unito a quello d'ingresso del successivo.



Per il principio di conservazione dell'energia, deve essere

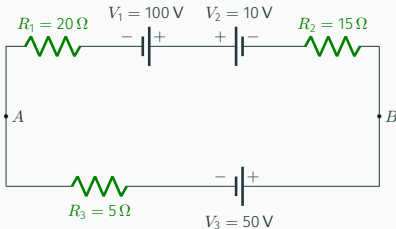
$$VI = I^2 R_1 + I^2 R_2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Quindi, per esempio,

$$V_1 = V_A - V_B = IR_1 = V \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

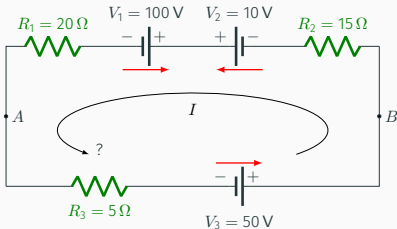
Esercizio

Per il circuito in figura, si ricavi il valore della corrente I , il suo verso di circolazione e la differenza di potenziale tra i punti A e B .



Esercizio

Per il circuito in figura, si ricavi il valore della corrente I , il suo verso di circolazione e la differenza di potenziale tra i punti A e B .



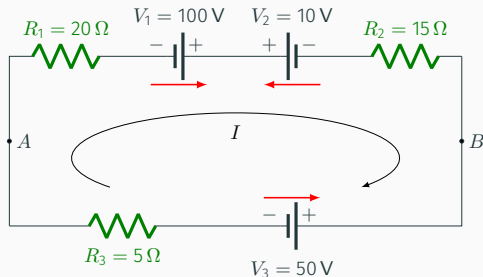
Per ipotesi, si supponga che la corrente circoli in senso antiorario (in rosso, nella figura sono indicati i versi dei campi elettromotori) Per la conservazione dell'energia deve essere:

$$-IV_1 + IV_2 + IV_3 = I^2(R_1 + R_2 + R_3) \quad \Rightarrow \quad I = -1\text{ A}$$

La corrente ha intensità di 1 A e scorre nel circuito nel verso opposto a quello ipotizzato.

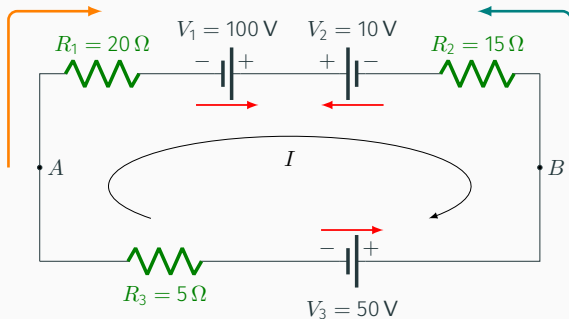
Se si fosse scelto come verso di scorrimento quello orario, si sarebbe scritto:

$$IV_1 - IV_2 - IV_3 = I^2(R_1 + R_2 + R_3) \quad \Rightarrow \quad I = 1\text{ A}$$



Per trovare la differenza di potenziale tra i punti A e B , si può indifferentemente considerare: 1) il tratto di circuito attraverso V_1 e V_2 o 2) il tratto di circuito attraverso V_3 .

In entrambi i casi si consideri ad arbitrio come positivo, ad esempio, il verso che da A conduce a B : di conseguenza si considererà positiva la corrente se si muove in questo verso e positiva una f.e.m. che tende a far passare nel circuito nel verso AB . Il potenziale in A sarà maggiore o minore di V_B a seconda che $V_A - V_B$ risulti positivo o negativo.



1) Tratto di circuito attraverso V_1 e V_2 andando da A verso B ($I > 0$):

$$I(V_A - V_B) + IV_1 - IV_2 = I^2(R_1 + R_2) \Rightarrow V_A - V_B = -55 \text{ V}$$

1) Tratto di circuito attraverso V_1 e V_2 andando da B verso A ($I < 0$):

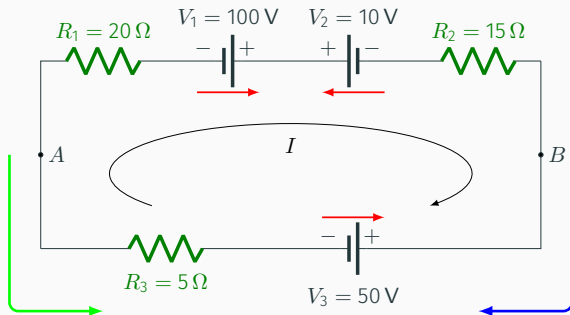
$$\cancel{I}(V_B - V_A) - \cancel{I}V_1 + \cancel{I}V_2 = \cancel{I}^2(R_1 + R_2) \Rightarrow V_B - V_A = 55 \text{ V}$$

NELLA IX LEZIONE ABBIAMO VISTO CHE LA POTENZA DISSIPATA
(O GENERATA) IN UN TRATTO DI CIRCUITO È



$$P = IV = I(V_A - V_B)$$

Si tratta di potenza ceduta al circuito dalla sorgente che mantiene i potenziali V_A e V_B se la I passa nel verso in cui i potenziali decrescono, e di potenza ceduta dal circuito in caso contrario.



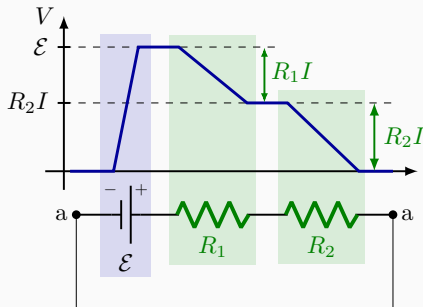
2) Tratto di circuito attraverso V_3 andando da A verso B ($I < 0$):

$$\cancel{\sum}(V_A - V_B) + \cancel{\sum}V_3 = I\cancel{\sum}R_3 \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = IR_3 - V_3 = -55 \text{ V}$$

2) Tratto di circuito attraverso V_3 andando da B verso A ($I > 0$):

$$\cancel{\sum}(V_B - V_A) - \cancel{\sum}V_3 = I\cancel{\sum}R_3 \quad \Rightarrow \quad V_B - V_A = IR_3 + V_3 = 55 \text{ V}$$

Variazioni del potenziale elettrico in un circuito composto da un generatore di f.e.m. ideale e due resistenze in serie



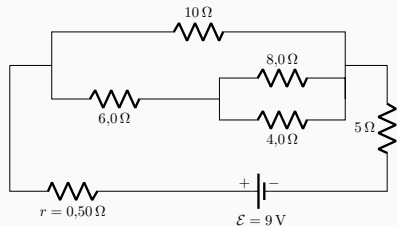
Il legge di Kirchhoff (regola delle maglie): la somma delle variazioni di potenziale lungo un percorso chiuso qualunque di un circuito è zero: $\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 = 0$.

È una conseguenza della conservazione dell'energia!

$$I\mathcal{E} = I^2 R_1 + I^2 R_2$$

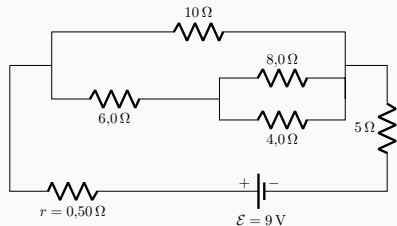
Esercizio 8 della VI prova di autovalutazione

Una batteria da 9 V e di resistenza interna $r = 0,5\,\Omega$ viene usata per alimentare il circuito mostrato in figura. (a) Quanta corrente viene erogata dalla batteria? (b) Qual è la tensione tra i morsetti della batteria? (c) Qual è l'intensità della corrente che scorre nel resistore da $6\,\Omega$?

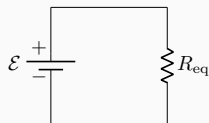


Esercizio 8 della VI prova di autovalutazione

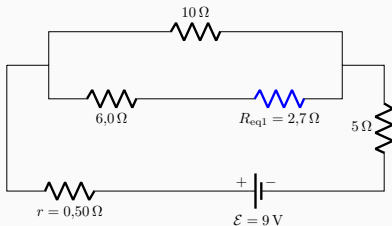
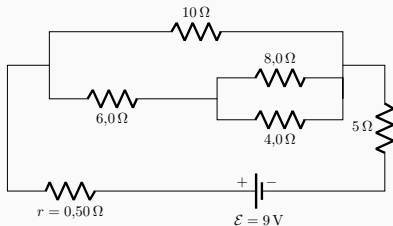
Una batteria da 9 V e di resistenza interna $r = 0,5\,\Omega$ viene usata per alimentare il circuito mostrato in figura. (a) Quanta corrente viene erogata dalla batteria? (b) Qual è la tensione tra i morsetti della batteria? (c) Qual è l'intensità della corrente che scorre nel resistore da $6\,\Omega$?



Come nell'esercizio precedente, per rispondere alla prima domanda è necessario semplificare il circuito riducendo l'insieme delle resistenze a un'unica resistenza equivalente R_{eq} .

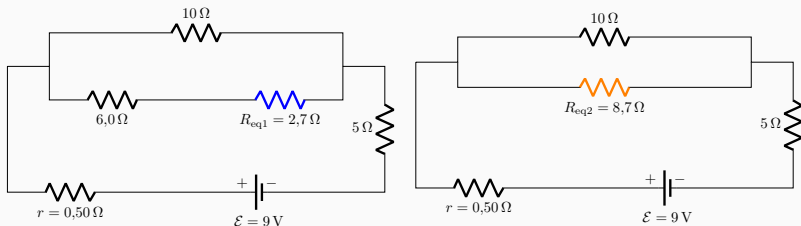


Prima semplificazione del circuito



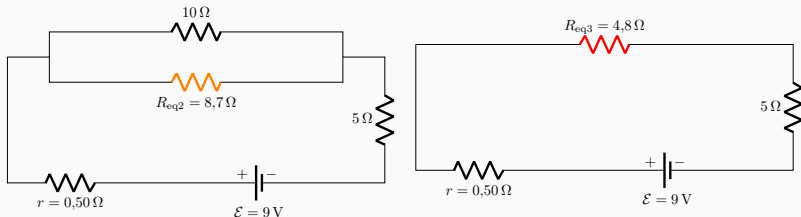
$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{8,0\ \Omega} + \frac{1}{4,0\ \Omega} = \frac{3}{8\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_{eq1} = 2,7\ \Omega.$$

Seconda semplificazione del circuito



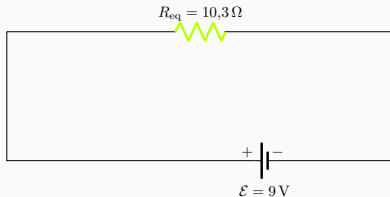
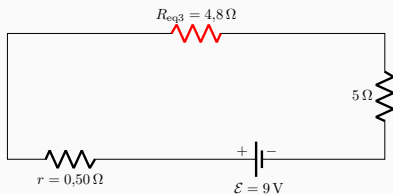
$$R_{\text{eq2}} = 6\ \Omega + 2,7\ \Omega = 8,7\ \Omega.$$

Terza semplificazione del circuito



$$\frac{1}{R_{eq3}} = \frac{1}{10,0\ \Omega} + \frac{1}{8,7\ \Omega} = 0,21\ \Omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{eq3} = 4,8\ \Omega.$$

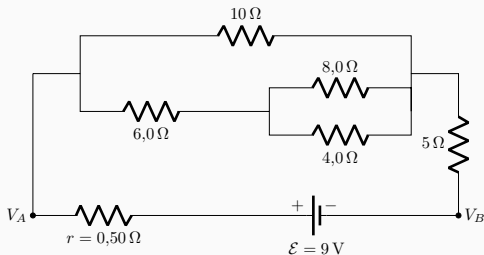
Ultima semplificazione del circuito



$$R_{eq} = 4,8\,\Omega + 5,0\,\Omega + 0,5\,\Omega = 10,3\,\Omega.$$

Per la legge di Ohm, la corrente che scorre nel circuito è:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = 0,87\text{ A}.$$



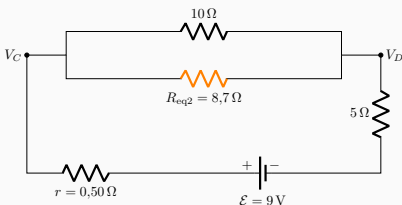
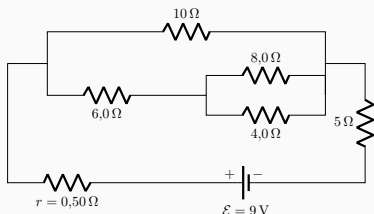
(b) Per calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B , considerando che la corrente circola nel circuito in senso orario. si può andare dal punto B al punto A passando attraverso la f.e.m. ($I > 0$):

$$V_B - V_A + \mathcal{E} = Ir$$

e quindi

$$V_B - V_A = -\mathcal{E} + Ir = -9\text{ V} + (0,87\text{ A})(0,5\ \Omega) = -8,6\text{ V}.$$

(c) La corrente I' che scorre nella resistenza da $6,0\ \Omega$ è la stessa che scorre in R_{eq2}



Considerando che la corrente scorre nel circuito in senso orario, andando dal punto D al punto C passando attraverso la f.e.m. ($I > 0$) si ha:

$$(V_D - V_C) + 9,0\text{ V} = (0,87\text{ A})(0,5\ \Omega + 5\ \Omega) = -4,2\text{ V} \quad \Rightarrow \quad V_C - V_D = 4,2\text{ V}$$

e quindi

$$I' = \frac{4,2\text{ V}}{8,7\ \Omega} = 0,48\text{ A}.$$

Circuiti RC: carica e scarica di un condensatore

Circuiti con resistori e condensatori (circuiti RC)

Nei circuiti esaminati fino a ora le correnti non variavano nel tempo (correnti stazionarie).

Nei circuiti RC, formati da resistori e condensatori, le correnti variano nel tempo.

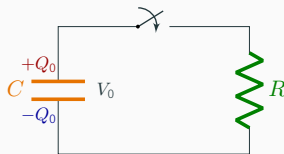
Esempio di impiego dei circuiti RC:

- Controllo velocità tergicristallo automobili.
- Flash macchine fotografiche.
- **Pacemakers cardiaci.**
- **Defibrillatori.**

Nello studio dei circuiti RC non si è tanto interessati allo stato finale della tensione o della carica sul condensatore, ma il modo nel quale queste grandezze variano nel tempo.

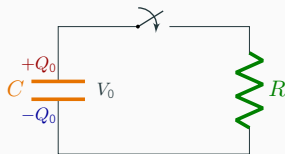
Scarica di un condensatore

Un condensatore di capacità C e carica Q_0 viene collegato all'istante $t = 0$ a una resistenza R chiudendo un interruttore. Come variano nel tempo la carica sulle armature del condensatore e la corrente che scorre nel circuito?

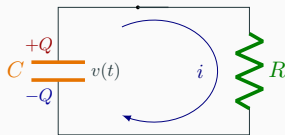


Scarica di un condensatore

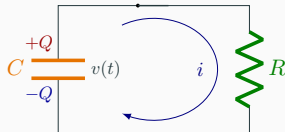
Un condensatore di capacità C e carica Q_0 viene collegato all'istante $t = 0$ a una resistenza R chiudendo un interruttore. Come variano nel tempo la carica sulle armature del condensatore e la corrente che scorre nel circuito?



1. Cariche fluiscono (corrente i) attraverso R ed energia viene dissipata.
2. La carica su ciascuna armatura (Q), la differenza di potenziale ai capi del condensatore e l'energia immagazzinata decrescono nel tempo.



3. Il condensatore nei riguardi di R funziona come un generatore di f.e.m. variabile e resistenza interna nulla.



L'equazione del circuito è

$$v = iR \quad (1)$$

dove sia v sia i sono funzioni del tempo. Si può porre

$$v(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \text{e} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$$

cosicché dall'Eq. (1) si ottiene per Q la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

che si può risolvere per separazione di variabili

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln Q = -\frac{1}{RC}t + \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad Q(t) = e^{(-\frac{t}{RC} + \text{cost.})} = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

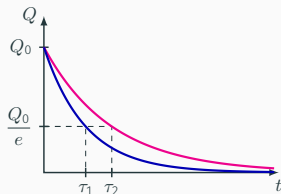
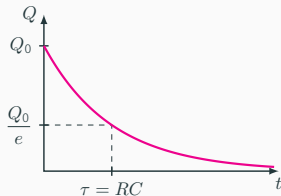
avendo posto $K = e^{\text{cost.}}$. Poiché $Q(0) = Q_0$ si ottiene:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

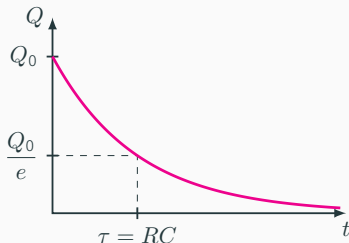
La carica (e la differenza di potenziale Q/C) decadono con legge esponenziale.

La costante $\tau = RC$ ha le dimensioni di un tempo e si chiama **costante di tempo** del circuito e caratterizza la rapidità di scarica; infatti per $t = \tau$ la carica sulle armature del condensatore si è ridotta a

$$Q = \frac{Q_0}{e}$$

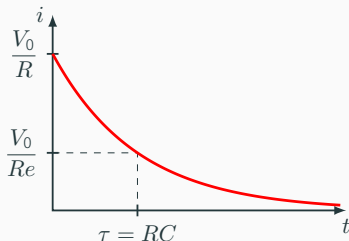


$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



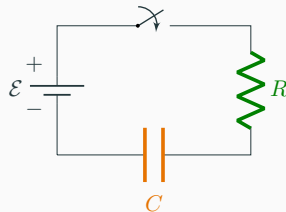
$$i = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

La corrente decade esponenzialmente con la stessa costante di tempo di Q .



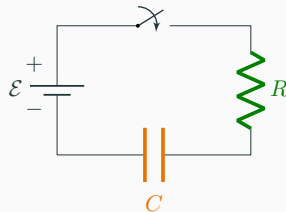
Carica di un condensatore

Un condensatore di capacità C viene caricato da una sorgente di f.e.m. $\mathcal{E}$ attraverso una resistenza R . Come varia nel tempo la carica sulle armature del condensatore e la corrente che scorre nel circuito?

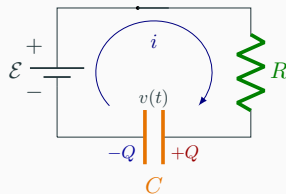


Carica di un condensatore

Un condensatore di capacità C viene caricato da una sorgente di f.e.m. $\mathcal{E}$ attraverso una resistenza R . Come varia nel tempo la carica sulle armature del condensatore e la corrente che scorre nel circuito?



1. Cariche fluiscono (corrente i) attraverso R e il condensatore inizia a caricarsi.
2. Il condensatore, caricandosi, agisce come una f.e.m. $\mathcal{E}'$ diretta in verso opposto a $\mathcal{E}$ giacché le cariche accumulate sulle sue armature tendono a spingere le cariche in verso opposto a quello della corrente prodotta da $\mathcal{E}$.



L'equazione del circuito è

$$\mathcal{E} - v = iR. \quad (2)$$

In questo caso, è

$$dq = dQ = i dt \quad \text{e} \quad v = \frac{Q}{C}.$$

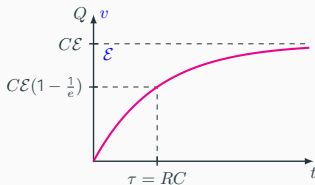
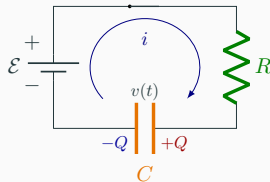
cosicché l'equazione del circuito 2 diviene:

$$\frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}.$$

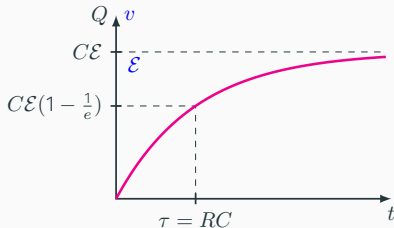
La soluzione di quest'equazione è:

$$Q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

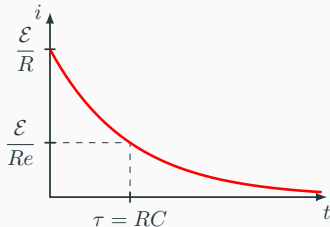
Q e v crescono esponenzialmente con costante di tempo $\tau = RC$. Il valore finale è di Q è $C\mathcal{E}$ mentre quello di v è $\mathcal{E}$.



$$Q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

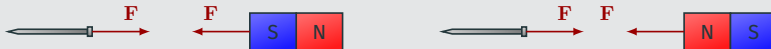


La corrente decade esponenzialmente con la stessa costante di tempo di Q .

Il campo magnetico

Magneti e campi magnetici

- Tutti noi abbiamo osservato un magnete attrarre piccoli oggetti metallici.



- Qualunque magnete, di qualsiasi forma, ha due **poli**, convenzionalmente indicati come polo nord (**N**) e polo sud (**S**) in corrispondenza dei quali gli effetti magnetici sono più intensi.
- Sperimentalmente si trova che:
 - poli di tipo diverso si attraggono;



- poli dello stesso tipo si respingono.



Magneti e campi magnetici

- La forza esercitata da un polo sull'altro varia con l'inverso del quadrato della distanza che separa i due poli.
- Sebbene la forza tra due poli magnetici sia simile a quella che si esercita tra due cariche elettriche, vi è una fondamentale differenza tra cariche elettriche e poli magnetici.
I campi magnetici si presentano sempre in coppia: non esiste il monopolo magnetico.
- Solo pochi elementi chimici quali il ferro, il cobalto, il nichel, il gadolino e alcuni dei loro ossidi e leghe generano effetti magnetici. Questi materiali vengono detto **ferromagnetici**.
- Altri materiali mostrano effetti magnetici, ma in maniera così debole che solo l'utilizzo di strumenti assai sensibili riescono a rilevarli.

Magneti e campi magnetici

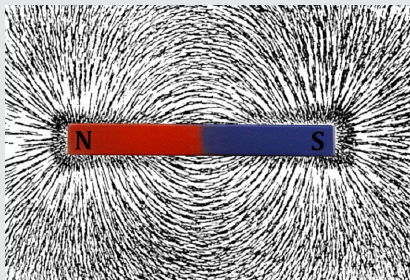
- L'identificazione del polo nord e sud di una barretta magnetica viene effettuata in base all'orientazione presa dalla barretta se sospesa mediante un sottile filo.
- Si osserva, infatti, che la barretta si orienta così che uno dei suoi due poli, che per convenzione sarà il polo nord magnetico (N) si orienta *approssimativamente* verso il polo geografico sud terrestre.
- Questo fenomeno avviene perché la Terra agisce come un gigantesco magnete.

Magneti e campi magnetici

- Similmente al concetto di campo elettrico generato da una carica elettrica, si può immaginare la presenza di un **campo magnetico** nello spazio circostante un magnete.
- La forza che un magnete esercita A su un magnete B (o su un oggetto metallico) può essere descritta come l'interazione tra il campo magnetico generato dal magnete A con il magnete B (o con l'oggetto metallico).
- Anche per il campo magnetico è possibile individuare le **linee di forza del campo magnetico**. Per tracciarle è necessario che:
 1. la direzione del campo magnetico sia in ogni punto tangente alla linea di forza passante per quel punto;
 2. il numero di linee di forza per unità di superficie nell'intorno di un punto sia proporzionale all'intensità del campo magnetico in quel punto.

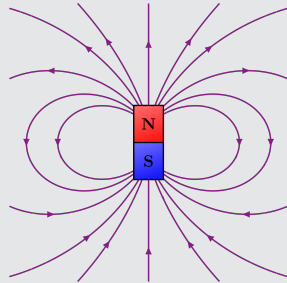
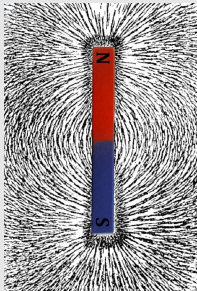
Magneti e campi magnetici

- Direzione e verso del campo magnetico in un punto risultano definiti dalla direzione indicata dal polo nord di un ago magnetico posto in quel punto (una definizione più rigorosa verrà data in seguito).
- La limatura di ferro, comportandosi come un insieme di piccoli aghi magnetici che si allineano nella direzione del campo, può mettere in evidenza le linee di forza di un campo magnetico.



Magneti e campi magnetici

- Per la definizione data, le linee di forza del campo magnetico di un magnete escono dal polo nord ed entrano nel polo sud, poiché il polo nord di un ago magnetico viene attratto dal polo sud del magnete.



- A causa della mancanza di singoli poli magnetici, le linee di forza del campo magnetico, a differenza delle linee di forza del campo elettrico, formano sempre curve chiuse.

Magneti e campi magnetici

- Successivamente alla scoperta delle azioni magnetiche prodotte dai magneti si scoprì che **un campo magnetico può essere generato da una corrente elettrica.**

L'interazione magnetica fondamentale è quella
che una carica in movimento esercita
su un'altra carica anch'essa in movimento

Il campo magnetico

- L'interazione (forza) magnetica si aggiunge all'interazione generata dal campo elettrico che si esercita tra due cariche elettriche.
- Analogamente al campo elettrico, si considera che la forza magnetica venga generata da un campo detto **campo magnetico**.
- **Una carica in movimento genera nello spazio un campo magnetico e tale campo, a sua volta, esercita una forza su un'altra carica in movimento.**
- Poiché le correnti sono costituite da cariche elettriche in movimento, l'interazione magnetica può essere pensata come un'interazione tra correnti.

Il campo elettromagnetico

- Nel 1830 Michael Faraday e Joseph Henry dimostrarono indipendentemente che un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico.
- Intorno al 1860 James Clerk Maxwell sviluppò una teoria completa dell'elettricità e del magnetismo nella quale si mostrava come un campo elettrico variabile nel tempo produce un campo magnetico.

Nella prima parte delle lezioni dedicate al magnetismo verrà analizzato l'effetto di un campo magnetico su una carica in movimento; successivamente si analizzeranno le sorgenti del campo magnetico.

La forza esercitata dal campo magnetico

- Si osserva sperimentalmente che quando una carica q si muove con velocità $\mathbf{v}$ in un campo magnetico $\mathbf{B}$, sulla carica si esercita una forza (forza magnetica) che dipende sia da q sia dal modulo e direzione della velocità.
- Si supponga di conoscere la direzione del campo magnetico $\mathbf{B}$ in un punto. Tale direzione può essere determinata, per esempio tramite un ago magnetico sospeso con un sottile filo.

Sulla carica si esercita una forza (**forza magnetica**) con le seguenti caratteristiche.

Forza su una carica in moto in un campo magnetico

1. La forza è proporzionale alla carica q .
2. La forza dipende dal segno della carica: la forza su una carica negativa ha il verso opposto a quella che si esercita su una carica positiva di eguale modulo che si muova con identica velocità.
3. La forza è proporzionale a v .
4. La forza è perpendicolare al campo magnetico e alla velocità.
5. La forza è proporzionale a $\sin \vartheta$, dove ϑ è l'angolo fra la velocità $\mathbf{v}$ e il campo magnetico $\mathbf{B}$: se $\mathbf{v}$ è parallela o antiparallela a $\mathbf{B}$, la forza è nulla.

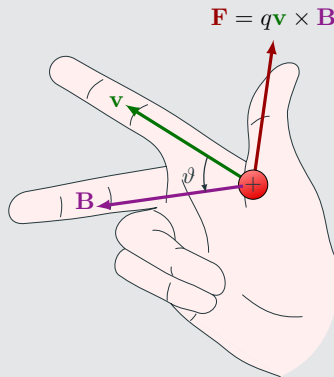
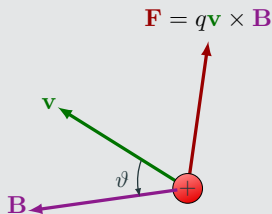
Queste osservazioni sperimentali possono essere sintetizzate come segue: quando una carica q si muove con velocità $\mathbf{v}$ in un campo magnetico $\mathbf{B}$, la forza magnetica $\mathbf{F}$ sulla carica è:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = qvB \sin \vartheta$$

Forza su una carica in moto in un campo magnetico

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = qvB \sin \vartheta$$

- Poiché $\mathbf{F}$ è perpendicolare sia a $\mathbf{v}$ sia a $\mathbf{B}$, è perpendicolare al piano su cui giacciono questi due vettori.



$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = qvB \sin \vartheta$$

L'equazione definisce il campo magnetico $\mathbf{B}$ in funzione della forza esercitata su una carica in moto.

L'unità di misura del campo magnetico è il **tesla** (T). Una carica di $q = 1 \text{ C}$ che si muova con una velocità $v = 1 \text{ m/s}$ perpendicolarmente a un campo magnetico $B = 1 \text{ T}$ è sottoposta a una forza $F = 1 \text{ N}$.

- Campo magnetico terrestre: $\simeq 10^{-4} \text{ T}$
- Grandi magneti permanenti per applicazioni industriali: $\simeq 0,5 \text{ T}$
- **Magnet per risonanza magnetica:** $\simeq 1,5 \text{ T}$
- Magnete più potente attualmente esistente: (Università della Florida - USA): $= 44,14 \text{ T}$

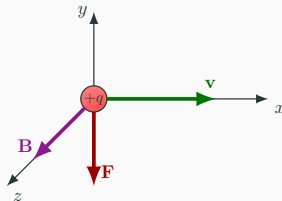
Esercizio

Si determini la forza che si esercita su un protone che si muove con velocità $\mathbf{v} = 4 \times 10^6 \text{ m/s} \mathbf{i}$ in un campo magnetico $\mathbf{B} = 2 \text{ T} \mathbf{k}$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Per la regola del prodotto vettoriale la forza $\mathbf{F}$ è diretta nel verso opposto a quello dell'asse y .

Poiché l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ è 90° si ha che



$$F = qvB = 1,28 \times 10^{-12} \text{ N}.$$

In conclusione, la forza $\mathbf{F}$ è determinata

$$\mathbf{F} = -1,28 \times 10^{-12} \text{ N} \mathbf{j}.$$

Forza su una carica in moto in un campo magnetico

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = qvB \sin \vartheta$$

Poiché $\mathbf{F}$ è perpendicolare a $\mathbf{v}$ essa non fa lavoro; infatti

$$L = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = 0.$$

Di conseguenza, il modulo della velocità della particella rimane costante perché non varia la sua energia cinetica:

$$\Delta T = L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1.$$

Se una carica si muove in un campo magnetico, la forza che si esercita su di essa cambia la direzione della velocità ma non il suo modulo.