Complementi di Fisica - XIV Lezione

Soluzione degli esercizi N. 4, 7 e 8 della VI prova di autovalutazione

Soluzione degli esercizi N. 3, 4 e 5 della VII prova di autovalutazione

Andrea Bettucci

24 aprile 2024

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sapienza Università di Roma

Soluzione degli esercizi N. 4, 7 e 8 della VI prova di autovalutazione

Esercizio 4

Si calcoli la caduta di potenziale che si verifica agli estremi di un filo di rame della lunghezza di $21\,\mathrm{m}$ e del diametro di $1{,}628\,\mathrm{mm}$ nel quale scorre una corrente di $12\,\mathrm{A}$. (Resistività del rame: $1{,}68 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$).

Esercizio 4

Si calcoli la caduta di potenziale che si verifica agli estremi di un filo di rame della lunghezza di $21\,\mathrm{m}$ e del diametro di $1{,}628\,\mathrm{mm}$ nel quale scorre una corrente di $12\,\mathrm{A}$. (Resistività del rame: $1{,}68 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$).

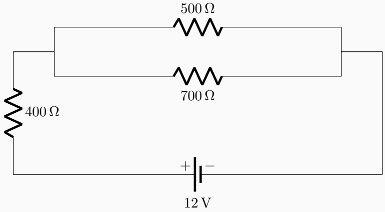
Dalla legge di Ohm e dall'espressione della resistività di un conduttore filiforme si ha:

$$V = IR = I\rho\frac{\ell}{A} = (12\,\mathrm{A})(1{,}68 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m})\frac{21\,\mathrm{m}}{\pi\left(\dfrac{1{,}628 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^2}.$$

Si ricava: $V = 2{,}0\,\mathrm{V}$.

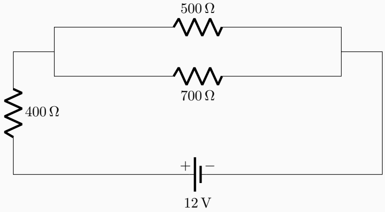
Esercizio 7

Considerando il circuito della figura, *(a)* Quanta corrente eroga la batteria? *(b)* Qual è l'intensità della corrente che scorre nelle resistenze da 500 e $700\,\Omega$?



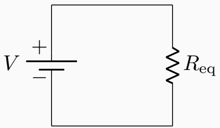
Esercizio 7

Considerando il circuito della figura, *(a)* Quanta corrente eroga la batteria? *(b)* Qual è l'intensità della corrente che scorre nelle resistenze da 500 e $700\,\Omega$?

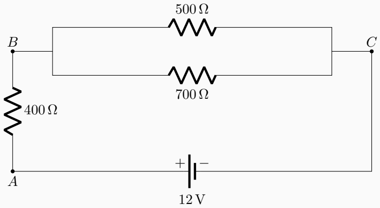


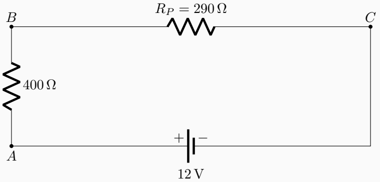
Per rispondere alla prima domanda è necessario semplificare il circuito riducendo l'insieme delle resistenze a un'unica resistenza equivalente R_{eq}, cosicchè dalla legge di Ohm si ha:

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}}.$$



Semplificazione del circuito - Circuito equivalente



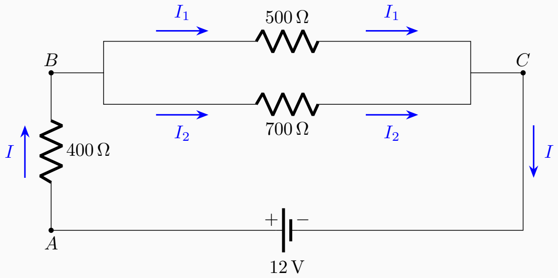


$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{500\,\Omega} + \frac{1}{700\,\Omega} = 0{,}0034\,\Omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_P = 290\,\Omega.$$

$$R_{\mathrm{eq}} = 290\,\Omega + 400\,\Omega = 690\,\Omega.$$

Per la legge di Ohm la corrente erogata dalla batteria è:

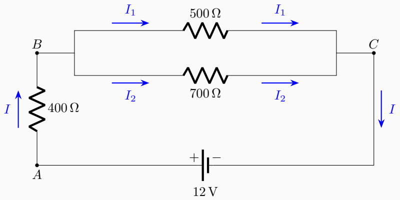
$$I = \frac{V}{R_{\mathrm{eq}}} = 0{,}0174\,\mathsf{A} \simeq 17\,\mathsf{mA}.$$

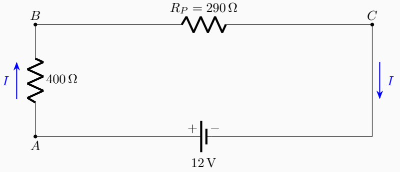


La corrente che scorre nelle due resistenze da 500 e $700\,\Omega$ non è la stessa. Le due resistenze hanno la medesima differenza di potenziale ai loro capi $(V_B - V_C)$ ma, per la legge di Ohm, avendo resistenza diversa, sono percorse da correnti diverse. Ovviamente deve essere

$$I_1 + I_2 = I$$

Per la determinazione di I_1 e I_2 occorre conoscere $V_B - V_C$ che si ottiene dal circuito equivalente tramite la legge Ohm.



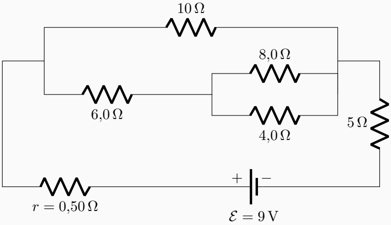


$$V_B - V_C = IR_P = (0{,}0174\,\mathrm{A})(290\,\Omega) = 5\,\mathrm{V}.$$

$$I_1 = \frac{5\,\mathrm{V}}{500\,\Omega} = 10\,\mathrm{mA} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{5\,\mathrm{V}}{700\,\Omega} = 7\,\mathrm{mA}.$$

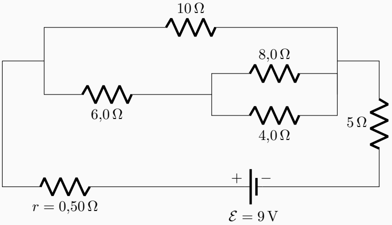
Esercizio 8

Una batteria da $9\,\mathrm{V}$ e di resistenza interna $r = 0{,}5\,\Omega$ viene usata per alimentare il circuito mostrato in figura. *(a)* Quanta corrente viene erogata dalla batteria? *(b)* Qual è la tensione tra i morsetti della batteria? *(c)* Qual è l'intensità della corrente che scorre nel resistore da $6\,\Omega$?

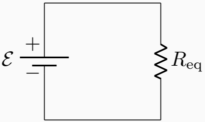


Esercizio 8

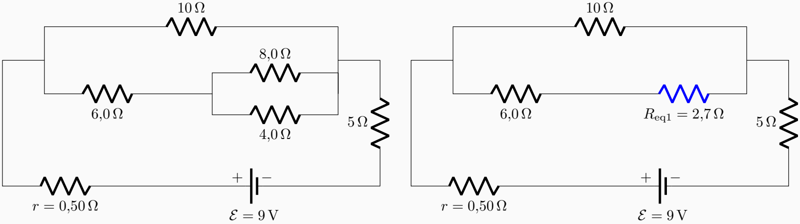
Una batteria da $9\,\mathrm{V}$ e di resistenza interna $r = 0{,}5\,\Omega$ viene usata per alimentare il circuito mostrato in figura. *(a)* Quanta corrente viene erogata dalla batteria? *(b)* Qual è la tensione tra i morsetti della batteria? *(c)* Qual è l'intensità della corrente che scorre nel resistore da $6\,\Omega$?



Come nell'esercizio precedente, per rispondere alla prima domanda è necessario semplificare il circuito riducendo l'insieme delle resistenze a un'unica resistenza equivalente R_{eq}.

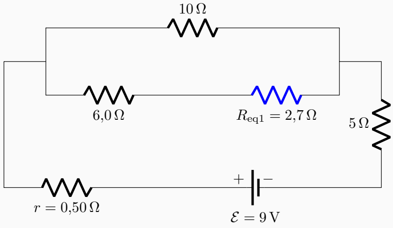


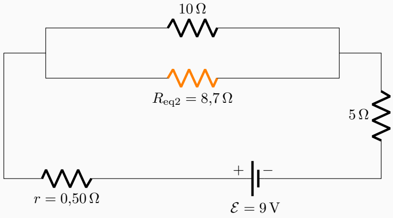
Prima semplificazione del circuito



$$\frac{1}{R_{\text{eq1}}} = \frac{1}{8{,}0\,\Omega} + \frac{1}{4{,}0\,\Omega} = \frac{3}{8\,\Omega} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{eq1}} = 2{,}7\,\Omega.$$

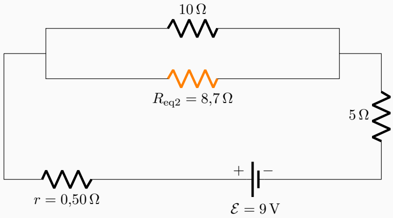
Seconda semplificazione del circuito

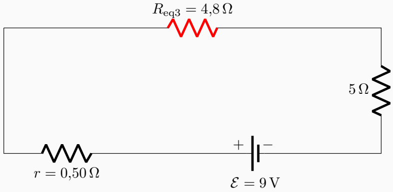




$$R_{\mathrm{eq2}} = 6\,\Omega + 2{,}7\,\Omega = 8{,}7\,\Omega.$$

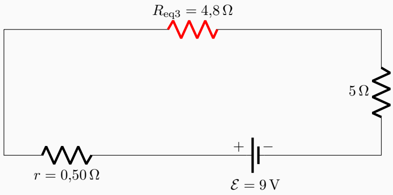
Terza semplificazione del circuito

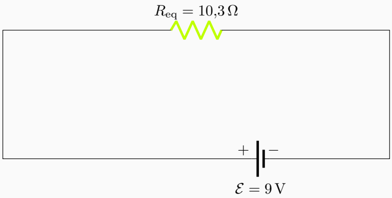




$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq3}}} = \frac{1}{10{,}0\,\Omega} + \frac{1}{8{,}7\,\Omega} = 0{,}21\,\Omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{\mathrm{eq3}} = 4{,}8\,\Omega.$$

Ultima semplificazione del circuito

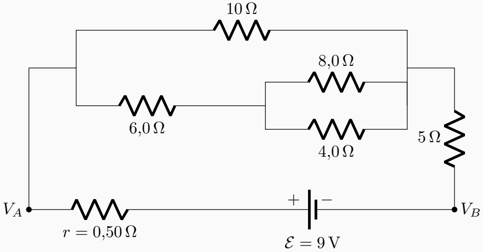




$$R_{\text{eq}} = 4{,}8\,\Omega + 5{,}0\,\Omega + 0{,}5\,\Omega = 10{,}3\,\Omega.$$

Per la legge di Ohm, la corrente che scorre nel circuito è:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{eq}}} = 0{,}87\,\text{A}.$$



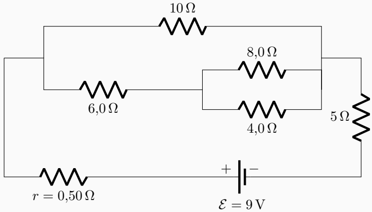
(b) Per calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B, considerando che la corrente circola nel circuito in senso orario. si può andare dal punto B al punto A passando attraverso la f.e.m. $(I > 0)$:

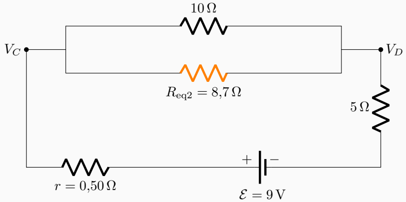
$$V_B - V_A + \mathcal{E} = Ir$$

e quindi

$$V_B - V_A = -\mathcal{E} + Ir = -9\,\mathrm{V} + (0{,}87\,\mathrm{A})(0{,}5\,\Omega) = -8{,}6\,\mathrm{V}.$$

(c) La corrente I' che scorre nella resistenza da $6{,}0\,\Omega$ è la stessa che scorre in R_{eq2}





Considerando che la corrente scorre nel circuito in senso orario, andando dal pinto D al punto C passando attraverso la f.e.m. $(I > 0)$ si ha:

$$(V_D - V_C) + 9{,}0\,\text{V} = (0{,}87\,\text{A})(0{,}5\,\Omega + 5\,\Omega) = -4{,}2\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad V_C - V_D = 4{,}2\,\text{V}$$

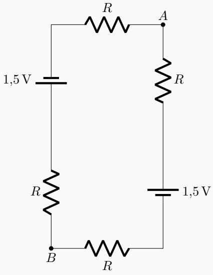
e quindi

$$I' = \frac{4{,}2\,\text{V}}{8{,}7\,\Omega} = 0{,}48\,\text{A}.$$

Soluzione degli esercizi N. 3, 4 e 5 della VII prova di autovalutazione

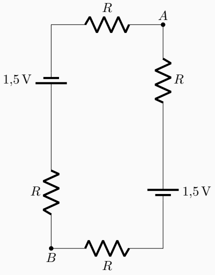
Esercizio 3

Si calcoli la differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito a lato dove $R = 130\,\Omega$.

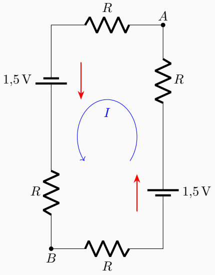


Esercizio 3

Si calcoli la differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito a lato dove $R = 130\,\Omega$.



I campi elettromotori delle due batterie tendono entrambi a far circolare la corrente in senso antiorario. Per il principio di conservazione dell'energia, supponendo di percorrere il circuito proprio in verso antiorario, si ha:



$$IV + IV = I^2(4R) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{2R}$$

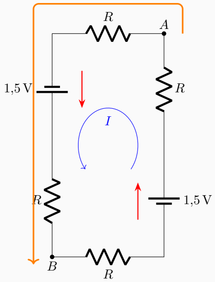
Per determinare la differenza di potenziale tra il punto A e il punto B si supponga di percorrere il circuito da A a B in senso antiorario:

$$I(V_A - V_B) + IV = I^2(2R) \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = 2RI - V$$

Sostituendo il valore di I precedentemente trovato si ha:

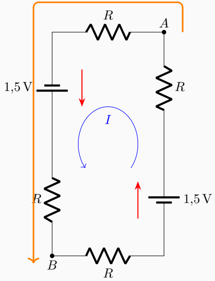
$$V_A - V_B = 2R\frac{V}{2R} - V = 0$$

senza nemmeno la necessità di sostituire i valore numerici di V ed R!



Per determinare la differenza di potenziale tra il punto A e il punto B si supponga di percorrere il circuito da A a B in senso antiorario:

$$I(V_A - V_B) + IV = I^2(2R) \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = 2RI - V$$



Sostituendo il valore di I precedentemente trovato si ha:

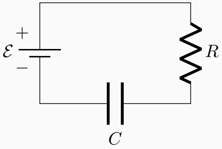
$$V_A - V_B = 2R\frac{V}{2R} - V = 0$$

senza nemmeno la necessità di sostituire i valore numerici di V ed R!

Se si fosse percorso il circuito dal punto A al punto B in senso orario, quale equazione si sarebbe scritta?

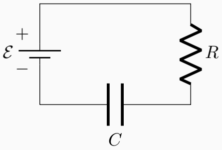
Esercizio 4

Un condensatore C inizialmente scarico viene connesso in serie a una resistenza R e a un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}$. Si mostri che la differenza tra l'energia erogata dalla f.e.m. per caricare il condensatore e l'energia finale posseduta dal condensatore è uguale all'energia dissipata nella resistenza per effetto Joule.



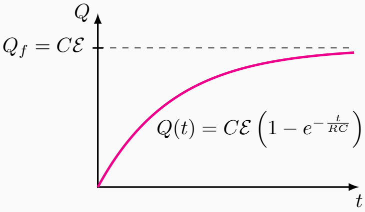
Esercizio 4

Un condensatore C inizialmente scarico viene connesso in serie a una resistenza R e a un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}$. Si mostri che la differenza tra l'energia erogata dalla f.e.m. per caricare il condensatore e l'energia finale posseduta dal condensatore è uguale all'energia dissipata nella resistenza per effetto Joule.



Nel processo di carica una quantità di carica $Q_f = C\mathcal{E}$ passa a regime ($t \to \infty$) attraverso la f.e.m. che quindi fornisce un'energia

$$U_{\text{f.e.m.}} = Q_f \mathcal{E} = \mathcal{E}^2 C$$



Il condensatore alla fine del processo di carica è carico con Q_f e quindi possiede un'energia

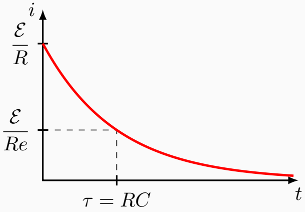
$$U_C = \frac{1}{2}Q_f\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$$

La differenza tra l'energia erogata dalla f.e.m. per caricare il condensatore e l'energia finale posseduta dal condensatore è

$$\Delta U = U_{\text{f.e.m.}} - U_C = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C.$$

Per calcolare la potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza si deve ricordare come varia nel tempo la corrente che circola nel circuito:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$



La potenza istantaneamente dissipata nella resistenza è:

$$\frac{dU_R}{dt} = P(t) = i(t)^2 R$$

Si ha perciò:

$$\frac{dU_R}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad dU_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

L'energia dissipata nella resistenza durante il processo di carica del condensatore è allora:

$$\Delta U_R = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

L'integrale può essere risolto per sostituzione ponendo $x = 2t/RC$ cosicché

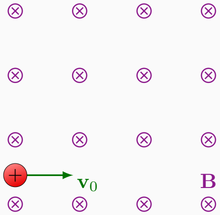
$$dt = \frac{RC}{2} dx$$

e, in conclusione, si trova

$$\Delta U_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{RC}{2} \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C = \Delta U$$

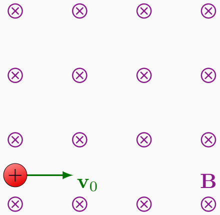
Esercizio 5

Una carica positiva q di massa m entra con velocità $\mathbf{v}_0$ in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}$ diretto perpendicolarmente alla velocità. Si mostri che il moto della particella è circolare uniforme; si determini *(a)* il raggio della traiettoria circolare e *(b)* il periodo del moto.



Esercizio 5

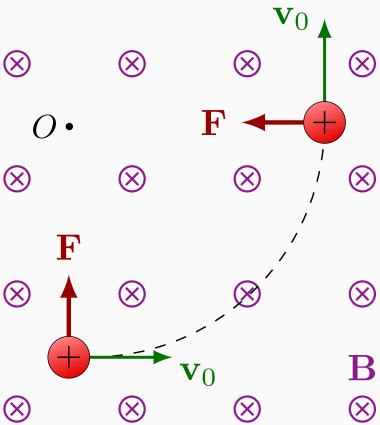
Una carica positiva q di massa m entra con velocità $\mathbf{v}_0$ in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}$ diretto perpendicolarmente alla velocità. Si mostri che il moto della particella è circolare uniforme; si determini *(a)* il raggio della traiettoria circolare e *(b)* il periodo del moto.



La forza su una carica in moto in un campo magnetico è perpendicolare alla velocità:

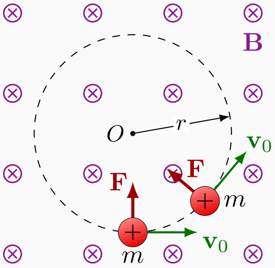
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad F = qvB\sin\vartheta.$$

Se una carica si muove in un campo magnetico, la forza che si esercita su di essa cambia la direzione della velocità, ma non il modulo.



Se il campo è uniforme $\mathbf{F}$ ha modulo costante e diretta sempre verso un punto O.

Il moto di una particella carica che si muove perpendicolarmente a un campo magnetico uniforme è circolare e uniforme.



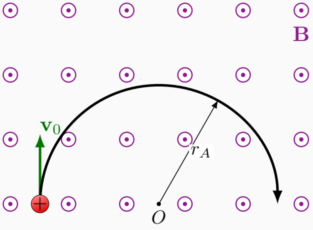
La forza $\mathbf{F}$ è di modulo costante (qvB) e centripeta essendo sempre perpendicolare a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$; quindi:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad qv_0B = m\frac{v_0^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_0}{qB}.$$

Di conseguenza, il periodo del moto è:

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Spettrometro di massa

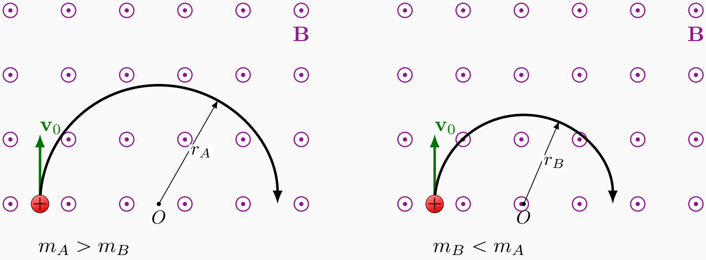


$m_A > m_B$

$m_B < m_A$

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \Rightarrow \quad r_A > r_B$$

Spettrometro di massa



$$r = \frac{mv}{qB} \quad \Rightarrow \quad r_A > r_B$$

Cariche identiche ma di massa diversa che entrano con la stessa velocità perpendicolarmente a un medesimo campo magnetico uniforme, descrivono orbite circolari di raggio diverso.