ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame 17 febbraio 2020

Nome e Cognome ______________________________matricola ____________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa, il seguente integrale di variabile reale

$$(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^3+ix)(x-2)}\,dx$$

$$= 2\pi i \underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{1}{z(z^2+i)(z-2)}, e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)}_{I} + \pi i \underbrace{\left(\operatorname{res}\frac{1}{z(z^2+i)(z-2)}, 0\right)}_{(II)}$$

$$+\pi i \underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{1}{z(z^2+i)(z-2)}, 2\right)}_{(III)}$$

(lemma del grande cerchio e del polo semplice).

$$(I) = \frac{1}{2z^2(z-2)}\Big|_{z=e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{i}{\sqrt{2}+4i+i\sqrt{2}}$$

$$(II) = \frac{i}{2}$$

$$(III) = \frac{1}{2(4+i)}$$

sono tutti poli d'ordine 1

E 2 Dato $n \in \{1, 2, ...\}$, usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y_n(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + n^2 y(t) = 1 \\ y(n) = 0 \\ y'(n) = -3 \end{cases}$$

$\tilde{y}(t) = y(t+n)$ risolve

$$\begin{cases} \tilde{y}''(t) + n^2 \tilde{y}(t) = 1 \\ \tilde{y}(0) = 0 \\ \tilde{y}'(0) = -3 \end{cases}$$

Posto $\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}(t)](s)$ si ha

$$\tilde{Y}(s) = \left(-3 + \frac{1}{s}\right) / (s^2+n^2) = -\frac{3}{s^2+n^2} + \frac{1}{s(s^2+n^2)}$$

$$\tilde{y}(t) = -\frac{3}{n} \operatorname{sen}(nt) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos(nt)\right)$$

$$y(t) = -\frac{3}{n} \operatorname{sen}\left(n(t-n)\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos(n(t-n))\right)$$

E 3 Individuare l' insieme di definizione, di convergenza puntuale, di convergenza totale e la somma $S(x)$, della seguente serie di funzioni in campo reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{x-1}},\ x \in R$$

$I_{def} = R - \{1\}$

$A = (-\infty, 1)$

$\downarrow$

insieme di convergenza puntuale

$B_\alpha = [\alpha, 1)$ $\alpha < 1$ arbitrario

$\downarrow$

insiemi di convergenza totale $S(x) = \dfrac{1}{1 - 5^{\frac{1}{x-1}}}$

(con la posizione $5^{\frac{1}{x-1}} = t$, la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, serie geometrica di ragione t che converge per $|t| < 1$ e ha per somma $S(t) = \frac{1}{1-t}$)

Nome e Cognome ______________________________**matricola** ______________ 1.4

D 1

(i) Funzione esponenziale in campo complesso: definizione, continuitá e olomorfia.

(ii) Trovare l'aperto di olomorfia e il modulo della funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}-4i}, \ z \in C$$

Aperto d' olomorfia è $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

$$|e^{\frac{1}{z}-4i}| = |e^{\frac{1}{z}}| \cdot \underbrace{|e^{-4i}|}_{=1} = |e^{\frac{1}{z}}| =$$

$$= e^{Re(\frac{1}{z})} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

D2

(i) Provare l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di centro z_0.

(ii) Data la funzione

$$f(z) = \frac{z^4}{(1-z)^2}$$

scrivere il suo sviluppo in serie di potenze di centro $z_0 = 0$ e calcolare $f^{(37)}(0)$ (derivata 37-ma in 0).

(ii) $f(z) = z^4 \cdot D\left(\frac{1}{1-z}\right) = z^4 D\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n+3}$

per $|z|<1$ *

Per il punto (i) $\frac{f^{(37)}(0)}{37!} = a_{37} = 34$ da cui

$f^{(37)}(0) = 34 \cdot 37!$

* qui si è usata la derivabilità termine a termine per serie di potenze nell'intervallo di convergenza