ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame 17 febbraio 2020

Nome e Cognome ______________________________ matricola ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa, il seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+i)(x-i)^2}\,dx$$

$$= 2\pi i \Big[\underbrace{\mathrm{res}\left(\frac{1}{(z^2+i)(z-i)^2}, e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)}_{I} + \underbrace{\mathrm{res}\left(\frac{1}{(z^2+i)(z-i)^2}, i\right)}_{II} \Big]$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}(i-1)} \cdot \frac{4}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}-2i)^2}$$ polo di ordine 1

$$II = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+i}\right)_{|z=i} = -\frac{2z}{(z^2+i)^2}\Big|_{z=i} = -\frac{2i}{(i-1)^2} = 1$$ polo di ordine 2

(lemma del grande cerchio)

E 2 Dato $n \in \{1, 2, ...\}$, usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y_n(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + n^2 y(t) = 1 \\ y(n) = n \\ y'(n) = -1 \end{cases}$$

$\tilde{y}(t) = y(t+n)$ risolve

$$\begin{cases} \tilde{y}''(t) + n^2 \tilde{y}(t) = 1 \\ \tilde{y}(0) = n \\ \tilde{y}'(0) = 0 \end{cases}$$

Posto $\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}(t)](s)$ si ha

$$\tilde{Y}(s) = \left(sn + \frac{1}{s}\right) / (n^2 + s^2) = \frac{sn}{s^2+n^2} + \frac{1}{s(s^2+n^2)}$$

$$\tilde{y}(t) = n\cos(nt) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos(nt)\right)$$

$$y(t) = n\cos(n(t-n)) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos(n(t-n))\right)$$

E 3 Individuare l' insieme di definizione, di convergenza puntuale, di convergenza totale e la somma $S(x)$, della seguente serie di funzioni in campo reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2-x}},\ x \in R$$

$I_{def} = R - \{2\}$

$A = (2, +\infty)$

$\downarrow$

(insieme di convergenza puntuale)

$B_\alpha = (2, \alpha]$: $\alpha > 2$ arbitrario.

$\downarrow$

(insiemi di convergenza totale)

$S(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{1}{2-x}}}$

(con la posizione $2^{\frac{1}{2-x}} = t$, la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, serie geometrica di ragione t che converge per $|t| < 1$ e ha per somma $S(t) = \frac{1}{1-t}$)

D 1

(i) Funzione esponenziale in campo complesso: definizione, continuitá e olomorfia.

(ii) Trovare l'aperto di olomorfia e il modulo della funzione

$$f(z) = e^{4i}e^{\frac{1}{z^2}}, \; z \in C$$

Aperto di olomorfia è $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

$$\left|e^{4i} \cdot e^{\frac{1}{z^2}}\right| = \underbrace{\left|e^{4i}\right|}_{=1} \cdot \left|e^{\frac{1}{z^2}}\right| = e^{Re\left(\frac{1}{z^2}\right)} =$$

$$= e^{\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}} = e^{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

Nome e Cognome ______________________________________matricola ___________________ 2.5

D2

(i) Provare l'unicità dello sviluppo in serie di potenze di centro z_0.

(ii) Data la funzione

$$f(z) = \frac{2z}{(1-z^2)^2}$$

scrivere il suo sviluppo in serie di potenze di centro $z_0 = 0$ e calcolare $f^{(57)}(0)$ (derivata 57-ma in 0).

(ii) $f(z) = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z^2}\right] = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n z^{2n-1}$

(qui si è usato la derivabilità termine a termine per serie di potenze nell'intervallo di convergenza)

per il punto (i) $f^{(57)}(0) = 57!\, 58 = 58!$