ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 12 ottobre 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare il seguente integrale con due cifre decimali esatte

$$\int_0^1 sen(x^{\frac{1}{3}})\,dx.$$

Risposta: Dal teorema di integrazione termine a termine per serie uniformemente convergenti si ha

$$\int_0^1 sen(x^{\frac{1}{3}})\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,x^{\frac{2n}{3}+\frac{1}{3}} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,\frac{3}{2n+4}.$$

Dalla stima del resto n-mo R_n nelle serie di Leibnitz segue che

$$|R_n| \leq \frac{3}{(2n+6)(2n+3)!}$$

Per essere l'errore inferiore a 10^{-2} basta scegliere n tale che $\frac{3}{(2n+6)(2n+3)!} < 10^{-2}$ e dunque basta $n = 1$.

Il valore approssimato dell'integrale sarà dunque $\frac{3}{4} - \frac{1}{3!2}$.

E 2 Si consideri la funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π, definita in $[0, 2\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} cos\,t & \text{if} \quad 0 < \mathrm{t} < \pi \\ t^2 & \text{if} \quad \pi < \mathrm{t} < 2\pi \\ a & \text{if} \quad \mathrm{t} = 0 \\ b & \text{if} \quad \mathrm{t} = \pi. \end{cases}$$

(i) Individuare a e b in modo che la serie di Fourier converga a $f(t)$ per ogni $t \in R$.

(ii) Provare che la serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

converge e calcolare la somma (a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$; non è necessario calcolarli).

Risposta: La funzione è regolare a tratti in R, dunque la sua serie di Fourier converge in ogni punto alla semisomma fra limite destro e sinistro di $f(t)$ in quel punto. Dunque deve essere

$$a = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0^+} cos\,t + \lim_{t\to 2\pi^-} t^2\right) = \frac{1+4\pi^2}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}(\lim_{t\to\pi^-} cos\,t + \lim_{t\to\pi^+} t^2) = \frac{-1+\pi^2}{2}$$

Poichè $f(t)$ è di quadrato sommabile in $[0,2\pi]$, vale l'equaglianza di Parseval e dunque

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt =$$

$$\int_0^{\pi} cos^2 t dt + \int_{\pi}^{2\pi} t^4 dt = \int_0^{\pi} \frac{1+cos(2t)}{2} dt + \int_{\pi}^{2\pi} t^4 dt =$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{(2\pi)^5 - (\pi)^5}{5}$$

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1) Determinare i punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z - i - 1},$$

classificarli e calcolarne il residuo.

a)

$$z_k = log(\sqrt{2}) + i\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big) \quad k \in Z,$$

tutte singolarità eliminabili, $res(f(z), z_k) = 0$

b)

$$z_k = log(\sqrt{2}) + i\big(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\big) \quad k \in Z,$$

tutti poli semplici, $res(f(z), z_k) = \frac{1}{1+i}$

c)

$$z_k = i\big(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\big) \quad k \in Z,$$

tutti poli semplici, $res(f(z), z_k) = \frac{1}{1+i}$

2) Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \sum_{n=-3}^{+\infty} (z-2i)^n e^{2+3in^2-n^3},$$

dire dove è analitica e calcolare $\int_{\gamma} f(z)dz$ dove γ é la curva definita da $|z-2i| = \frac{1}{3}$.

a) Insieme di analiticità è $0 < |z-2i| < \frac{1}{3}$; $\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i e^{3(1+i)}$

b) Insieme di analiticità è $C - \{2i\}$; $\int_\gamma f(z)dz = 0$

c) Insieme di analiticità è $0 < |z-2i|$; $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i e^{3(1+i)}$

3) Risolvere usando la trasformata di Laplace il seguente problema

$$\begin{cases} y'' = H(t-1) * \; H(t-1) \qquad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

a) $y(t) = t\, H(t) + \frac{1}{3!}(t-2)^3 H(t-2)$

b) $y(t) = t + \frac{1}{3!}(t-2)^3$

c) $y(t) = t^2 + \frac{1}{3!}(t-2)^3 H(t-2)$

Risposte: b), c), a)