ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica

Esame 13 novembre 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare $f^{(50)}(0)$ (derivata 50-ma nel punto $x = 0$) della seguente funzione:

$$f(x) = log\sqrt{\frac{1-x^4}{1+x^4}} \quad x \in R,$$

(Suggerimento: usare le proprietá del logaritmo.)

Risposta:

$$f(x) = \frac{1}{2}[log(1-x^4) - log(1+x^4)] = -\sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^{4(2h+1)}}{2h+1}, \quad \forall x : |x| < 1$$

Si ha

$$f^{(50)}(0) = 0$$

in quanto $4(2h+1) \neq 50, \ \forall h \in N$.

E 2 Calcolare

$$\int_\gamma \frac{e^z}{e^{iz}+2i}dz.$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $T = \{z = x + iy : \frac{1}{2} \leq x \leq 8, \ -1 \leq y \leq 2\}$.

Risposta:

I punti singolari della funzione integranda sono $z_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - ilog2, \ \ k \in Z$.

Sono tutti poli semplici (il numeratore della funzione e la derivata del denominatore non si annullano mai).

Il punto $z_1 = \frac{3\pi}{2} - ilog2$ é l'unico che cade entro la curva e si ha $res(f(z), z_1) = \frac{e^{\frac{3\pi}{2} - ilog2}}{2}$.

Dal teorema dei residui si ha dunque

$$\int_\gamma \frac{e^z}{e^{iz}+2i}dz = \pi i e^{\frac{3\pi}{2} - ilog2}.$$

E 3 Stabilire, motivando le risposte, quali fra queste funzioni sono trasformate di Laplace di segnali:

(i) $Y(s) = \frac{cos(s)}{s}$

(ii) $Y(s) = \frac{1}{ssen(s)}$

(iii) Y(s)= $\frac{e^{-s}}{s+i}$

Per quelle che sono trasformate, ricostruire il segnale da cui provengono.

Risposta:

La prima non é trasformata di alcun segnale perché non é limitata in alcun semipiano $S = \{z \in C : Re(z) \geq \alpha\}$ (se fosse trasformata di un segnale $f(t)$ dovrebbe essere limitata nei semipiani di questo tipo con $\alpha > \sigma[f]$.)

La seconda non é trasformata di alcun segnale perché non é olomorfa in alcun semipiano $S = \{z \in C : Re(z) > \alpha\}$, in quanto ha infiniti punti singolari sull'asse reale, i punti $z_k = k\pi$, $k \in Z$ (se fosse trasformata di un segnale $f(t)$ dovrebbe essere olomorfa nel semipiano di convergenza.)

La terza é trasformata del segnale $f(t) = e^{-i(t-1)}$.

Nome e Cognome ____**matricola** ____________________ 1.4

D 1

(i) Data una funzione periodica $f(x)$, scrivere l'eguaglianza di Parseval specificando sotto quali ipotesi per $f(x)$ vale. Dare inoltre la definizione di convergenza in media quadratica per la serie di Fourier di $f(x)$, specificando sotto quali ipotesi su $f(x)$ ha luogo.

(ii) Dire se la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{x^4} - 1}$$

é di quadrato sommabile in $(0, 1)$.

Risposta:

Usando lo sviluppo in serie di potenze di centro $x_0 = 0$ dell'esponenziale, si vede che la funzione si comporta vicino a 0 come $\frac{1}{x}$ e dunque non é di quadrato sommabile nell'intervallo (e nemmeno sommabile.)

Nome e Cognome ____ **matricola** ____________________ 1.5

D 2

(i) Definizione di integrale curvilineo di una funzione $f(z)$ continua in un aperto connesso A del piano complesso, esteso ad una curva regolare γ di A.

(ii) Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva di $f(z)$ in A.