ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 14 febbraio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni , definita per $x \in R$ da

$$f_n(x) = \frac{|x|^{2n}}{|x|^n + 1}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

L'insieme di convergenza puntuale è $A = \{x : |x| \leq 1\}$ e la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \quad |x| = 1 \\ \\ 0 & se \quad |x| < 1 \end{cases}$$

Posto $|x| = t$, la funzione $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{t^n+1}$ è crescente e dunque per ogni n

$$g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|<1} |f_n(x)| = \frac{1}{2}$$

per cui $\lim_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{2} \neq 0$. Ciò comporta che la convergenza non è uniforme in A.

E' però uniforme in ogni sottoinsieme $B_\alpha = \{x : |x| \leq \alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$. Infatti, sempre per il fatto che $f_n(t)$ è crescente, si ha

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{B_\alpha} |f_n(x)| = \frac{\alpha^{2n}}{\alpha^n + 1}$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$.

E 2

Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = 4, \ \ t \geq 0 \\ \\ y(0) = \beta \end{cases}$$

con $\beta \in R$. Determinare poi il valore di β per cui $y(0) = y(3)$.

Soluzione: Usando la trasformata di Laplace e ponendo $L[y(t)](s) = Y(s)$, si ha

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+3)} + \frac{\beta}{s+3}$$

da cui

$$y(t) = \frac{4}{3}(1 - e^{-3t}) + \beta e^{-3t}$$

Imponendo $y(0) = y(3)$, si trova $\beta = \frac{4}{3}$.

D Nei seguenti tre quesiti si indichi la (sola) risposta esatta motivandola:

(**1**)

Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π e definita nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ come

$$f(t) = \begin{cases} 1 \quad se \quad t \in [-\pi, 0) \\ \\ -1 \quad se \quad t \in [0, \pi), \end{cases}$$

dire, motivando la risposta, quanto vale la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} b_k^2$ dove b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$. (Non calcolare i coefficienti.)

a) 2

b) 2π

c) 0

Soluzione: a) Usare l'eguaglianza di Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f^2(t)dt$$

(valida se $f(t)$ è di quadrato sommabile, a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f) e osservare che i coefficienti a_k sono tutti nulli perchè $f(t)$ è dispari.

(2)

Dare la definizione di aperto semplicemente connesso.

Dato l'aperto

$$A = C - \{z = x + iy : x = y, \ x \geq 0\}$$

dire, motivando la risposta, quale di queste funzioni ammette primitiva in A:

a) $sen\left(\frac{1}{z-2}\right)$

b) $sen\left(\frac{1}{z-1-i}\right)$

c) $sen\left(\frac{1}{z-i}\right)$

Soluzione: b) Infatti l'insieme A è semplicemente connesso e la funzione è olomorfa in A (osservare infatti che l'unico punto singolare della funzione, $1 + i$, non appartiene ad A.)

(3)

Data

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{4} z^n |n - 2i|^n$$

individuare l'insieme in cui è analitica, classificare i suoi punti singolari e calcolare

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove γ è la curva $|z| = 20$.

a) C, $z = 0$ singolarità essenziale,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b)$|z| > 0$, $z = 0$ singolarità di tipo polo do ordine 4,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$$

c) C^*, $z = 0$ singolarità essenziale,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Soluzione: c) La somma di una serie di Laurent è analitica nella corona circolare in cui converge sia la parte regolare che la parte singolare. La parte regolare converge in C perchè composta da un numero finito di termini. La parte singolare converge in C^* perchè si può scrivere come

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n |n - 2i|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{|-n - 2i|^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w^n \frac{1}{|-n - 2i|^n}$$

(dove si è posto $w = \frac{1}{z}$.) L'ultima serie è un'ordinaria serie di potenze e converge in tutto C (ha raggio di convergenza $+\infty$.) La singolarità $z = 0$ è essenziale perchè la parte singolare della serie di Laurent è composta da infiniti termini. Il residuo è $c_{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e per il calcolo dell'integrale si usa il teorema dei residui.