ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 14 febbraio 2022

Nome e Cognome __________________________________ **matricola** ________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni , definita per $x \in R$ da

$$f_n(x) = \frac{|x|^{4n}}{|x|^{2n} + 2}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

L'insieme di convergenza puntuale è $A = \{x : |x| \leq 1\}$ e la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & se \quad |x| = 1 \\ \\ 0 & se \quad |x| < 1 \end{cases}$$

Posto $|x| = t$, la funzione $f_n(t) = \frac{t^{4n}}{t^{2n}+2}$ è crescente e dunque per ogni n

$$g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|<1} |f_n(x)| = \frac{1}{3}$$

per cui $\lim_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{3} \neq 0$. Ciò comporta che la convergenza non è uniforme in A.

E' però uniforme in ogni sottoinsieme $B_\alpha = \{x : |x| \leq \alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$. Infatti, sempre per il fatto che $f_n(t)$ è crescente, si ha

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{B_\alpha} |f_n(x)| = \frac{\alpha^{4n}}{\alpha^{2n} + 1}$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$.

E 2

Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y'(t) - 4y(t) = 3, \ t \geq 0 \\ \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in R$. Determinare poi il valore di α per cui $y(0) = y(4)$.

Soluzione: Usando la trasformata di Laplace e ponendo $L[y(t)](s) = Y(s)$, si ha

$$Y(s) = \frac{3}{s(s-4)} + \frac{\alpha}{s-4}$$

da cui

$$y(t) = \frac{3}{4}(e^{4t} - 1) + \alpha e^{4t}$$

Imponendo $y(0) = y(4)$, si trova $\alpha = -\frac{3}{4}$.

D Nei seguenti tre quesiti si indichi la (sola) risposta esatta motivandola:

(1)

Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π e definita nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ come

$$f(t) = t$$

dire, motivando la risposta, quanto vale la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} b_k^2$ dove b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$. (Non calcolare i coefficienti.)

a) 0

b) $\frac{2}{3}\pi^2$

c) 2π

Soluzione: b) Usare l'eguaglianza di Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f^2(t)dt$$

(valida se $f(t)$ è di quadrato sommabile nell'intervallo $[-\pi, \pi)$, a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f) e osservare che i coefficienti a_k sono tutti nulli perchè $f(t)$ è dispari.

(2)

Dare la definizione di aperto semplicemente connesso.

Dato l'aperto

$$A = C - \{z = x + iy : x = -y,\ x \geq 0\}$$

dire, motivando la risposta, quale di queste funzioni ammette primitiva in A:

a) $sen\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)$

b) $sen\left(\frac{1}{(z-1+i)^2}\right)$

c) $sen\left(\frac{1}{(z-i)^2}\right)$

Soluzione: b) Infatti l'insieme A è semplicemente connesso e la funzione è olomorfa in A (osservare infatti che l'unico punto singolare della funzione, $1 - i$, non appartiene ad A.)

(3)

Data

$$f(z) = \sum_{n=-4}^{+\infty} z^n \frac{1}{|n - 3i|^n}$$

individuare l'insieme in cui è analitica, classificare i suoi punti singolari e calcolare

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove γ è la curva $|z| = 13$.

a) C, $z = 0$ singolarità di tipo polo do ordine 4,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$$

b)$|z| > 0$, $z = 0$ singolarità di tipo polo do ordine 4,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sqrt{10}$$

c) C^*, $z = 0$ singolarità essenziale,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sqrt{10}$$

Soluzione: b) La somma di una serie di Laurent è analitica nella corona circolare in cui converge sia la parte regolare che la parte singolare. La parte singolare converge in C^* (cioè per $|z| > 0$) perchè definita in C^* e composta da un numero finito di termini. La parte regolare converge in C perchè è l'ordinaria serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{1}{|n-3i|^n}$$

che ha raggio di convergenza $+\infty$. La singolarità $z = 0$ è un polo di ordine 4 perchè la parte singolare della serie di Laurent è composta da un numero finito di termini, con $c_{-4} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni $k > 4$. Il residuo è $c_{-1} = \sqrt{10}$ e per il calcolo dell'integrale si usa il teorema dei residui.