ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 15 settembre 2020

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Stabilire, motivando le risposte, se le seguenti funzioni di variabile complessa sono trasformate di Laplace di un segnale.

(i) $\frac{cos\, s}{s^2}$

(ii) $\frac{s^2}{cos\, s}$

(iii) e^{-s^2}

Soluzione

Una funzione di variabile complessa s che sia trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ con ascissa di convergenza $\sigma[f]$ deve essere olomorfa nel semipiano $Re(s) > sigma[f]$ e limitata nei semipiani della forma $Re(s) > \sigma_0 > \sigma[f]$.

Nessuna delle tre funzioni è trasformata di un segnale.

La prima perchè non è limitata sulle rette parallele all'asse delle ordinate $s = \alpha + iy, \quad y \in R, \ \alpha$ fissato, in quanto su tali rette $|\frac{cos\, s}{s^2}| = |\frac{e^{i\alpha - y} + e^{-i\alpha + y}}{2(\alpha^2 + y^2)}| \to +\infty$ per $y \to +\infty$.

La seconda perchè non è olomorfa in alcun semipiano $Re(s) > \alpha$ in quanto ha infiniti punti singolari sull'asse reale $s_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

La terza perchè di nuovo non è limitata sulle rette parallele all'asse delle ordinate, in quanto $|e^{-s^2}| = |e^{-\alpha^2 + y^2}|$ se $s = \alpha + iy$.

E 2 Calcolare

$$\int_\gamma |z - i| \ \frac{sen\, 2z}{z^2} dz$$

dove

$$\gamma(t) = i + 2e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione

$$\int_\gamma |z - i| \ \frac{sen\, 2z}{z^2} dz = 2 \int_\gamma \frac{sen\, 2z}{z^2} dz =$$

$$4\pi i\, res(\frac{sen\, 2z}{z^2}, 0) = 8\pi i$$

Si noti che il termine $|z - i|$ è costante (vale 2) sulla curva e pertanto esce dall'integrale. Il teorema dei residui non si può applicare tenendolo dentro l'integrale perchè $|z-i|$ non è olomorfa in alcun aperto. Inoltre $z = 0$ è un polo di ordine 1 con residuo 2 per la funzione $\frac{sen\, 2z}{z^2}$.

D 2 Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1) Data la funzione

$$f(x) = log\Big(\frac{1-5x}{10}\Big),$$

calcolare $f^{(50)}(0)$:

(a) $f^{(50)}(0) = -49!\; 5^{50}$

(b) $f^{(50)}(0) = -48!\; 5^{49}$

(c) $f^{(50)}(0) = 48!\; 5^{50}$

2) Dire per quale valore di $\alpha \in R$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{x^\alpha} - 1}$$

è di quadrato sommabile nell'intervallo $(0, 1]$:

(a) $\alpha < \frac{7}{2}$

(b) $\alpha < 0$

(c) $\alpha > 7$

3) Dire in quale regione del piano complesso la successione di funzioni complesse $(f_n(z))_{n\in N}$ definita da

$$f_n(z) = e^{nz} \quad z \in C$$

converge a $f(z) = 0$:

(a) $\forall z \in C$

(b) $\forall z : Re(z) < 0$

(c) $\forall z : Im(z) > 0$

Soluzione

a), a), b)