ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 15 settembre 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

(i) Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = Log(z^2 + i)$$

(determinazione principale del logaritmo), trovarne l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia.

Risposta. L'insieme di definizione è $C - \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\}$ (bisogna escludere i punti $z \in C$: $z^2 = -i$)

L'aperto di olomorfia è $C - \{z = x + iy : |y| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{1}{2y}\}$ (bisogna escludere i punti che rendono $z^2 + i$ reale negativo o nullo)

E 2

(i) Individuare la funzione limite $f(x)$, della seguente successione $(f_n(x))_{n\in N}$ di funzioni definita per $x \in [10, 20]$

$$f_n(x) = \left(\frac{senx}{x}\right)^{2n} - 1$$

(ii) Dire se la convergenza è uniforme in $[10, 20]$; se non lo è, individuare un sottoinsieme del precedente intervallo in cui c'è convergenza uniforme.

Risposta: la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) = -1$ nell'intervallo in questione (basta osservare che $|senx| < |x|$ per ogni $x \neq 0$ e dunque $\left(\frac{senx}{x}\right)^{2n}$ converge a zero).

La successione converge anche uniformemente in tutto il medesimo intervallo, poichè

$$g_n = \sup_{[10,20]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{[10,20]} \left(\frac{senx}{x}\right)^{2n} = a^{2n}$$

con $0 < a < 1$. Dunque $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$

D 2 Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta.

1) La funzione $f(z) = sen(\frac{1}{z^4}) + sen(\frac{1}{(z-3)^h})$ ammette primitiva in $C - \{0, 3\}$:
(a) $\forall h \in \{0, 2, 4, 6, ...\}$
(b) solo per $h = 1$
(c) per $h \in Z, \quad h \neq 1$

2) Quale fra queste funzioni è continua nel suo insieme di definizione ma non regolare a tratti:
(a) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} \quad x \in R$
(b) $f(x) = |cos\, x| \quad x \in R$

(c) $f(x) = |x|^5 \quad x \in R$

3) Usando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione $y_n(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = n^4 y(t) \\ \\ y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare poi

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t), \quad t \geq 0.$$

(a)

$$y_n(t) = \frac{1}{n^2} sen\,h\,(n^2 t)$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \\ +\infty & t > 0 \end{cases}$$

(b)

$$y_n(t) = \frac{1}{n} cos\,h\,(n^2 t)$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \\ +\infty & t > 0 \end{cases}$$

(c)

$$y_n(t) = \frac{1}{n^2} sen\,h\,(n^2 t)$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = +\infty \qquad t \geq 0$$

Risposte: c), a), a)