ANALISI MATEMATICA II
Laurea in INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA

Esame del 16 luglio 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

Esercizio 1

Sia data la successione di funzioni di variabile reale, definita per $x \geq 0$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & se \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \\ sen\, x & \text{altrove.} \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$ e almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

(ii) Calcolare l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace $L[f_n(x)](s)$ della funzione $f_n(x)$.

(iii) Calcolare il $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(x)](s)$.

Risposta:

i) $A = (0, +\infty)$ e $f(x) = sen\, x$. Non si ha convergenza uniforme in A in quanto, per ogni n fissato, $g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_{(0,\frac{1}{n}]} |n - sen\, x| \geq (n-1)$ e dunque $\lim_{n\to+\infty} g_n = +\infty$.

Si ha invece convergenza uniforme in ogni sottoinsieme di A della forma $B_\beta = [\beta, +\infty)$, $\beta > 0$ in quanto in tal caso $g_n = \sup_{B_\beta} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall n > \frac{1}{\beta}$ e dunque $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$.

ii)

$$\sigma[f_n] = 0,$$

$$L[f_n(x](s) = n\frac{1 - e^{-\frac{s}{n}}}{s} - \frac{1}{2i}\Big(\frac{e^{(s-i)\frac{1}{n}}}{s-i} + \frac{e^{(-s-i)\frac{1}{n}}}{s+i}\Big)$$

iii) Per ogni $s : Re(s) > 0$ si ha: $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(x](s) = 1 - \dfrac{1}{1+s^2}$

Esercizio 2

Data $f(z)$ definita come

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+9} \frac{1}{(z-2i)^n 2^{n+3}},$$

individuare l'insieme dove essa è analitica e dire se in tale insieme essa ammette primitiva.

Enunciare e dimostrare brevemente il risultato teorico che si è usato in quest'ultima risposta. Risposta:

L'insieme di analiticità è $A = \{z : 0 < |z - 2i| < \frac{1}{2}\}$ e in tale insieme la funzione non ammette primitiva in quanto $res(f(z), 2i) = c_{-1} = \frac{1}{2^4} \neq 0$ il che comporta che la funzione non ha integrale nullo lungo tutte le curve chiuse contenute in A.

Domande

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

D1)

Dare la definizione di serie di funzioni convergente puntualmente, totalmente e in media quadratica.

Date le seguenti funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ periodiche rispettivamente di periodo π e 2π

$$f_1(x) = x^k cos\, x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

e

$$f_2(x) = x^k cos\, x \quad x \in (-\pi, \pi)$$

dire per quali valori di $k \in \{1, 2, 3, ...n, ...\}$ la loro serie di Fourier converge totalmente e per quali in media quadratica

a) $f_1(x)$: convergenza totale e convergenza in media quadratica $\forall k \in \{1, 2, 3, ...n, ...\}$
$f_2(x)$: convergenza totale per ogni k pari; convergenza in media quadratica $\forall k \in \{1, 2, 3, ...n, ...\}$

b) $f_1(x)$: convergenza totale e convergenza in media quadratica $\forall k \geq 2$
$f_2(x)$: convergenza totale per nessun k; convergenza in media quadratica $\forall k \in \{1, 2, 3, ...n, ...\}$

c)$f_1(x)$: convergenza totale $\forall k \in \{1, 2, 3, ...n, ...\}$ e convergenza in media quadratica $\forall k \geq 2$
$f_2(x)$: convergenza totale per nessun k; convergenza in media quadratica $\forall k = 1, 2$

D2)

Trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione $f(z) = Log(1 + z^2)$.

a) Insieme di definizione: $C - \{\pm 1\}$
Aperto di olomorfia:$C - \{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}$

b) Insieme di definizione: $C - \{\pm i\}$
Aperto di olomorfia: $C - \{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}$

c) Insieme di definizione: $C - \{\pm i\}$
Aperto di olomorfia: $C - \{z = x + iy : x = 0, |y| \geq 1\}$

D3)

Calcolare , usando la definizione di integrale curvilineo,

$$\int_\gamma \overline{(z-2)} dz$$

dove $\overline{(z-2)}$ rappresenta il coniugato di $(z - 2)$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it} \quad -\pi \leq t < \pi$

a) 0
b) $-2\pi i$
c) $2\pi i$

Risposte: a), c), c)