ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 17 febbraio 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Enunciare una condizione sufficiente perchè una funzione $F(s)$ sia trasformata di Laplace di in segnale $f(t)$. Verificare che la funzione

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s-i)}$$

è la trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ e ricostruire tale segnale usando la formula dei residui.

Soluzione: Soluzione: la funzione è analitica nel semipiano $Re(s) > 0$ e $|F(s)|$ si comporta come $\frac{1}{|s|^3}$ per $|s| \to +\infty$, dunque soddisfa la condizione sufficiente perchè sia la trasformata di un segnale che viene ricostruito attraverso la formula

$$f(t) = res\Big(\frac{e^{st}}{s^2\,(s-i)}, 0\Big) + res\Big(\frac{e^{st}}{s^2\,(s-i)}, i\Big) =$$
$$1 + it - e^{it}$$

Notare che il punto singolare 0 è un polo doppio e il punto singolare i è un polo semplice.

E 2 Trovare i punti singolari della seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} + 2i}$$

classificarli e trovarne il residuo. Soluzione: i punti singolari sono gli zeri del denominatore, cioè i punti $z_k = -i\,log2 + \Big(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\Big)$ $k \in Z$. Sono tutti poli semplici perchè zeri del primo ordine per il denominatore (infatti la derivata del denominatore è $ie^{iz} \neq 0\ \forall z \in C$ e il numeratore è sempre diverso da zero)

$$res(f(z), z_k) = \frac{1}{ie^{iz_k}} = \frac{1}{2} \quad \forall k \in Z.$$

D 1 Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1)

Data la funzione

$$u(x, y) = cos\,x\,cosh\,y + x$$

determinare $v(x,y)$ in modo tale che $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia olomorfa in C e determinare f come funzione della variabile complessa z.

a) $v(x,y) = i(y - senx\, senh\, y),\ f(z) = z\, cosz$

b) $v(x,y) = y - senx\, senh\, y,\ f(z) = z + cosz$

c) $v(x,y) = i(y - senx\, senh\, y),\ f(z) = z + cosz$

2)

Dare la definizione di coefficienti di Fourier a_k e b_k di una funzione $f(t)$ periodica di periodo 2π e sommabile in $[-\pi,\pi)$. Sia $f(t)$ la funzione periodica di periodo 2π definita in $[-\pi,\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t-2|^\alpha} & \text{se} \quad t \in [-\pi,\pi) \setminus \{1\} \\ \\ 7 & \text{se} \quad t = 2 \end{cases}$$

con α parametro reale. Trovare i valori α per cui la serie numerica $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ converge e calcolarne la somma in dipendenza di α (senza calcolare a_k e b_k) .

a) $\alpha \geq \frac{1}{2}, \quad S = \frac{1}{\pi(1-2\alpha)}\Big((2+\pi)^{1-2\alpha} + (\pi-2)^{1-2\alpha}\Big)$

b) $\alpha < \frac{1}{2}, \quad S = \frac{1}{\pi(1-2\alpha)}(2+\pi)^{1-2\alpha}$

c) $\alpha < \frac{1}{2}, \quad S = \frac{1}{\pi(1-2\alpha)}\Big((2+\pi)^{1-2\alpha} + (\pi-2)^{1-2\alpha}\Big)$

3)

Data la funzione

$$f(z) = z^2,\ z = (x,y) \in C,$$

scrivere esplicitamente $u(x,y) = Re(f(z))$ e $v(x,y) = Im(f(z))$ e trovare gli insiemi di continuità e di olomorfia di $f(z)$.

Calcolare, usando la definizione di integrale curvilineo,

$$\int_\gamma z^2 dz$$

dove $\gamma(t) = 2e^{it} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

a) $-\frac{8\pi}{3}(1-i)$

b) $-\frac{8}{3}(1+i)$

c) $-\frac{8}{3}(1-i)$

Soluzioni :b), c), b)