ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 17 febbraio 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Enunciare una condizione sufficiente perchè una funzione $F(s)$ sia trasformata di Laplace di in segnale $f(t)$. Verificare che la funzione

$$F(s) = \frac{(s-1)}{s^2(s-2i)}$$

è la trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ e ricostruire tale segnale usando la formula dei residui.

Soluzione: Soluzione: la funzione è analitica nel semipiano $Re(s) > 0$ e $|F(s)|$ si comporta come $\frac{1}{|s|^2}$ per $|s| \to +\infty$, dunque soddisfa la condizione sufficiente perchè sia la trasformata di un segnale che viene ricostruito attraverso la formula

$$f(t) = res\Big(\frac{e^{st}\,(s-1)}{s^2\,(s-2i)}, 0\Big) + res\Big(\frac{e^{st}\,(s-1)}{s^2\,(s-2i)}, 2i\Big) =$$
$$\frac{2i(1-t)-1}{4} + \frac{e^{2it}(1-2i)}{4}$$

Notare che il punto singolare 0 è un polo doppio e il punto singolare $2i$ è un polo semplice.

E 2 Data la seguente funzione

$$f(z) = \frac{z+1}{\sin(z+1)}$$

calcolare

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove $\gamma(t) = -1 + 4e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione: i punti singolari sono $z_k = -1 + k\pi \quad k \in Z$. Il punto $z_0 = -1$ è singolarità eliminabile (quindi il suo residuo è 0), i punti $z_k = -1 + k\pi$, $k \neq 0$ sono poli semplici con residuo $\frac{k\pi}{(-1)^k} = k\pi(-1)^k$

All'interno della curva (circonferenza di centro -1 e raggio 4) cadono i punti singolari -1, $-1+\pi$, $-1-\pi$. Dunque dal teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

D 1 Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1)

Data la funzione

$$v(x,y) = -y + e^{-y} sen\, x$$

determinare $u(x,y)$ in modo tale che $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia olomorfa in C e determinare f come funzione della variabile complessa z.

a) $u(x,y) = -x + e^{-y} cos\, x,\ f(z) = e^{iz} - z$

b) $u(x,y) = i(-x + e^{-y} sen\, x),\ f(z) = e^{iz} - z$

c) $u(x,y) = i(-x + e^{-y} cos\, x),\ f(z) = e^{z} - z$

2)

Scrivere l'eguaglianza di Parseval per una funzione $f(t)$ periodica di periodo 2π specificando le ipotesi sotto cui vale. Sia $f(t)$ la funzione periodica di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t|^\alpha} & \text{se} \quad t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 5 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

con α parametro reale. Trovare i valori α per cui la serie numerica $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ converge (a_k e b_k coefficienti di Fourier di ft)) e calcolarne la somma (senza calcolare a_k e b_k) .

a) $\alpha < \frac{1}{2} \qquad S = \ 2\frac{1}{\pi^\alpha(1-\alpha)}$

b) $\alpha \geq \frac{1}{2} \qquad S = 2\ \frac{1}{\pi^\alpha(1-\alpha)}$

c) $\alpha < \frac{1}{2} \qquad S = 2\ \frac{1}{\pi^{2\alpha}(1-2\alpha)}$

3)

Data la funzione

$$f(z) = |z| \qquad z = (x,y) \in C,$$

scrivere esplicitamente $u(x,y) = Re(f(z))$ e $v(x,y) = Im(f(z))$ e trovare gli insiemi di continuità e di olomorfia di $f(z)$.

Calcolare, usando la definizione di integrale curvilineo,

$$\int_\gamma |z| dz$$

dove $\gamma(t) = 3e^{it} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

a)$3i\,(i-1)$

b) $9(i-1)$

c)$3\pi(i-1)$

Soluzioni: a), c),b)