ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 17 febbraio 2021

Nome e Cognome ____**matricola** ______________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Enunciare una condizione sufficiente perchè una funzione $F(s)$ sia trasformata di Laplace di in segnale $f(t)$. Verificare che la funzione

$$F(s) = \frac{s}{(s-\pi)(s-i)^2}$$

è la trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ e ricostruire tale segnale usando la formula dei residui.

Soluzione: la funzione è analitica nel semipiano $Re(s) > \pi$ e $|F(s)|$ si comporta come $\frac{1}{|s|^2}$ per $|s| \to +\infty$, dunque soddisfa la condizione sufficiente perchè sia la trasformata di un segnale che viene ricostruito attraverso la formula

$$f(t) = res\Big(\frac{e^{st}\, s}{(s-\pi)\,(s-i)^2}, \pi\Big) + res\Big(\frac{e^{st}\, s}{(s-\pi)\,(s-i)^2}, i\Big) =$$
$$\frac{e^{\pi t}\pi + e^{it}\Big((it+1)(i-\pi) - i\Big)}{(i-\pi)^2}$$

Notare che il punto singolare π è un polo semplice e il punto singolare i è un polo doppio.

E 2 Data la seguente funzione

$$f(z) = \frac{z-i}{\sin(z-i)}$$

calcolare

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove $\gamma(t) = i + 4e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione: i punti singolari sono $z_k = i + k\pi \quad k \in Z$. Il punto $z_0 = i$ è singolarità eliminabile (quindi il suo residuo è 0), i punti $z_k = i + k\pi$, $k \neq 0$ sono poli semplici con residuo $\frac{k\pi}{(-1)^k} = k\pi(-1)^k$

All'interno della curva (circonferenza di centro i e raggio 4) cadono i punti singolari i, $i+\pi$, $i-\pi$. dunque dal teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

D 1 Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1)

Data la funzione

$$v(x,y) = -y + e^x sen\, y$$

determinare $u(x,y)$ in modo tale che $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia olomorfa in C e determinare f come funzione della variabile complessa z.

a) $u(x,y) = -x + e^x cos\, y,\ f(z) = e^z - z$

b) $u(x,y) = i(y - e^x sen\, y),\ f(z) = -z + e^z$

c) $u(x,y) = i(-x + e^x cos\, y),\ f(z) = e^z - z$

2)

Dare la definizione di coefficienti di Fourier a_k e b_k di una funzione $f(t)$ periodica di periodo 2π e sommabile in $[0, 2\pi)$. Sia $f(t)$ la funzione periodica di periodo 2π definita in $[0, 2\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t-\pi|^\alpha} & \text{se} \quad t \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \\ 1 \quad \text{se} \quad t = \pi \end{cases}$$

con α parametro reale. Trovare i valori α per cui la serie numerica $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ converge e calcolarne la somma S (senza calcolare a_k e b_k) .

a) $\alpha < \frac{1}{2} \qquad S = 2\ \frac{1}{\pi^\alpha(1-\alpha)}$

b) $0 < \alpha < \frac{1}{2} \qquad S = 2\ \frac{1}{\pi^{2\alpha}(1-2\alpha)}$

c) $\alpha < \frac{1}{2} \qquad S = 2\ \frac{1}{\pi^{2\alpha}(1-2\alpha)}$

3)

Data la funzione

$$f(z) = \bar{z} + 1 \qquad z = (x,y) \in C,$$

scrivere esplicitamente $u(x,y) = Re(f(z))$ e $v(x,y) = Im(f(z))$ e trovare gli insiemi di continuità e di olomorfia di $f(z)$.

Calcolare, usando la definizione di integrale curvilineo,

$$\int_\gamma \bar{z}^2 dz$$

dove $\gamma(t) = 4e^{it} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

a) $i + 1$

b) $i(i + 1)$

c) $i - 1$

Soluzioni: a), c), a)