Analisi Matematica 2 I canale
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 20 dicembre 2021

Nome e Cognome ____ **matricola** ____________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

Esercizio 1

Data la funzione di variabile complessa

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-i)^2(s-2)},$$

provare che è trasformata di un segnale $f(t)$, scrivere la formula di inversione e ricostruire il segnale attraverso tale formula e l'uso dei residui.

Soluzione: La funzione $G(s) = \frac{1}{(s-i)^2(s-2)}$ soddisfa le due condizioni affinchè una funzione sia la trasformata di un segnale, cioè essere analitica in un semipiano $Re(s) > \sigma_0$ (qui $\sigma_0 = 2$, visto che i due punti singolari sono i, polo doppio e 2, polo semplice) e comportarsi per $|s| \to +\infty$ come $\frac{1}{|s|^k}$, $k > 1$ (qui k=3). Attenzione la verifica delle condizioni va fatta su $G(s)$ e non sulla funzione iniziale $F(s)$ (che ovviamente non soddisfa la seconda condizione)

Il segnale $g(t)$ che ha come trasformata $G(s)$ può essere ricostruito come

$$g(t) = \sum_j res(e^{st}G(s), s_j)$$

dove s_j sono tutti i punti singolari di $G(s)$. La funzione iniziale $F(s)$ sarà la trasformata del segnale $f(t) = g(t-2)$.

$$g(t) = \sum_j res(e^{st}G(s), s_j) = res(e^{st}G(s), i) + res(e^{st}G(s), 2) =$$

$$\frac{te^{it}(i-2) - e^{it}}{3-4i} + \frac{e^{2t}}{3-4i}$$

$$f(t) = g(t-2) = \frac{(t-2)e^{i(t-2)}(i-2) - e^{i(t-2)}}{3-4i} + \frac{e^{2(t-2)}}{3-4i}$$

Esercizio 2

Individuare l'insieme di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(x)$ della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = (1 + \sqrt[3]{x-3})^n \qquad x \in R$$

Dire se la convergenza è uniforme in A. Se non lo è, trovare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione: $A = (-5, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-5,3) \\ \\ 1 & x = 3 \end{cases}$$

In A la convergenza non può essere uniforme perchè le $f_n(x)$ sono funzioni continue in A, mentre $f(x)$ non è continua in A.

La convergenza è uniforme in ogni sottoinsieme della forma $[a, b]$ con $-5 < a < b < 3$ in quanto in un sottoinsieme di questo tipo $|1 + \sqrt[3]{x-3}| \le \alpha < 1$ e dunque

$$g_n = \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[a,b]} |(1 + \sqrt[3]{x-3})^n| \le \alpha^n \to 0$$

(la successione infatti si presenta nella forma $(w)^n$ che converge puntualmente in $\{w \in C : |w| < 1\} \cup \{w = 1\}$ alla funzione che vale 0 se $|w| < 1$ e 1 se $w = 1$. Tale successione converge uniformemente negli insiemi $\{w \in C : |w| \le \alpha < 1\}$. Nel nostro caso $w = 1 + \sqrt[3]{x-3}$.)

Domande

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

D1)

Data la funzione

$$f(z) = Log((z+i)^2),$$

i) trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia di $f(z)$

ii) trovare un aperto di C in cui $f(z)$ ammetta primitiva.

a)

i) Insieme di definizione $C - \{-i\}$, aperto di olomorfia $C - \{z = x + iy : x = 0, y \in R\}$

ii) $C - \{z = x + iy : x = 0,\ 1 \le y \le 2\}$

b)

i) Insieme di definizione C, aperto di olomorfia $C - \{z = x + iy : x \le 0,\ y = -1\}$

ii) $\{z = x + iy : x > 0\} \cup \{z = x + iy : x < 0\}$

c)

i) Insieme di definizione $C - \{-i\}$, aperto di olomorfia $C - \{z = x + iy : x = 0, y \in R\}$

ii) $\{z = x + iy : x > 0\}$

Soluzione: c).

Infatti per trovare l'insieme di definizione bisogna togliere da C i punti che annullano $(z+i)^2$; per trovare l'insieme di olomorfia bisogna togliere da C i punti che rendono $(z+i)^2$ reale negativo o nullo.

Inoltre la funzione ammette primitiva in ogni aperto semplicemente connesso contenuto nell'insieme di olomorfia e dunque in particolare in $\{z = x + iy : x > 0\}$.

D2)

Individuare le due regioni del piano complesso in cui la seguente funzione è sviluppabile in serie di Laurent centrata nel punto $z_0 = 5$,

$$f(z) = \frac{1}{z + 4i}$$

e calcolare lo sviluppo in quella fra le due regioni che è limitata.

a) $|z+4i|<1,\ |z+4i|>1$;

$$f(z)=\frac{1}{z+4i}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-5)^n}{(5+4i)^{n+1}}\qquad |z+4i|<1$$

b) $|z-5|<\sqrt{41},\ |z-5|>\sqrt{41}$;

$$f(z)=\frac{1}{z+4i}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^n}{(5+4i)^{n+1}}\qquad |z-5|<\sqrt{41}$$

c) $|z-5|<1,\ |z-5|>1$;

$$f(z)=\frac{1}{z+4i}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^n}{(5+4i)^{n}}\qquad |z-5|<1$$

Soluzione: b).

Le due regioni sono il cerchio aperto di centro 5 e raggio $\sqrt{41}$ (che è pari alla distanza fra 5 e il punto singolare $4i$) e la corona circolare aperta di raggi $\sqrt{41}$ e $+\infty$. In tali regioni infatti la funzione è analitica e pertanto sviluppabile in serie di Laurent.

D3)

Quale di questi insiemi A del piano complesso può essere l'insieme degli zeri di una funzione analitica in C non identicamente nulla ?

a) $A=Z$, Z interi relativi

b) $A=\{z=x+iy : x=\sqrt{y}\}$

c) $A=\{z=x+iy : x^2+(y-1)^2\leq 1\}$

Motivare la risposta, enunciare il teorema che si è usato e dimostrarlo.

Soluzione: a).

Si usa il teorema degli zeri isolati valido per funzioni analitiche.