Analisi Matematica 2 I canale
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 20 dicembre 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

Esercizio 1

Data la funzione di variabile complessa

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+i)(s+2)^2},$$

provare che è trasformata di un segnale $f(t)$, scrivere la formula di inversione e ricostruire il segnale attraverso tale formula e l'uso dei residui.

Soluzione: La funzione $G(s) = \frac{1}{(s+i)(s+2)^2}$ soddisfa le due condizioni affinchè una funzione sia la trasformata di un segnale, cioè essere analitica in un semipiano $Re(s) > \sigma_0$ (qui $\sigma_0 = 0$, visto che i due punti singolari sono $-i$, polo semplice e -2, polo doppio) e comportarsi per $|s| \to +\infty$ come $\frac{1}{|s|^k}$, $k > 1$ (qui k=3). Attenzione la verifica delle condizioni va fatta su $G(s)$ e non sulla funzione iniziale $F(s)$ (che ovviamente non soddisfa la seconda condizione)

Il segnale $g(t)$ che ha come trasformata $G(s)$ può essere ricostruito come

$$g(t) = \sum_j res(e^{st}G(s), s_j)$$

dove s_j sono tutti i punti singolari di $G(s)$. La funzione iniziale $F(s)$ sarà la trasformata del segnale $f(t) = g(t-1)$.

$$g(t) = \sum_j res(e^{st}G(s), s_j) = res(e^{st}G(s), -i) + res(e^{st}G(s), -2) =$$

$$\frac{e^{-it}}{3-4i} + \frac{te^{-2t}(i-2) - e^{-2t}}{3-4i}$$

$$f(t) = g(t-1) = \frac{e^{-i(t-1)}}{3-4i} + \frac{(t-1)e^{-2(t-1)}(i-2) - e^{-2(t-1)}}{3-4i}$$

Esercizio 2

Individuare l'insieme di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(x)$ della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = (2 + \sqrt[3]{x+1})^n \qquad x \in R$$

Dire se la convergenza è uniforme in A. Se non lo è, trovare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione: $A = (-28, -2]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-28, -2) \\ \\ 1 & x = -2 \end{cases}$$

In A la convergenza non può essere uniforme perchè le $f_n(x)$ sono funzioni continue in A, mentre $f(x)$ non è continua in A.

La convergenza è uniforme in ogni sottoinsieme della forma $[a, b]$ con $-28 < a < b < -2$ in quanto in un sottoinsieme di questo tipo $|2 + \sqrt[3]{x+1})| \leq \alpha < 1$ e dunque

$$g_n = \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[a,b]} |(2 + \sqrt[3]{x+1})^n| \leq \alpha^n \to 0$$

(la successione infatti si presenta nella forma $(w)^n$ che converge puntualmente in $\{w \in C : |w| < 1\} \cup \{w = 1\}$ alla funzione che vale 0 se $|w| < 1$ e 1 se $w = 1$. Tale successione converge uniformemente negli insiemi $\{w \in C : |w| \leq \alpha < 1\}$. Nel nostro caso $w = 2 + \sqrt[3]{x+1}$.)

Domande

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

D1)

Data la funzione

$$f(z) = Log((i - 2z)^2),$$

i) trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia di $f(z)$

ii) trovare un aperto di C in cui $f(z)$ ammetta primitiva.

a)

i) Insieme di definizione $C - \{\frac{i}{2}\}$, aperto di olomorfia $C - \{z = x + iy : x = 0, y \in R\}$

ii) $C - \{z = x + iy : x \leq 0\}$

b)

i) Insieme di definizione C, aperto di olomorfia $C - \{z = x + iy : x \leq 0,\ y = \frac{1}{2}\}$

ii) $\{z = x + iy : x > 0\} \cup \{z = x + iy : x < 0\}$

c)

i) Insieme di definizione C^*, aperto di olomorfia $C - \{z = x + iy : x = 0, y \in R\}$

ii) $\{z = x + iy : x > 0\} \cup \{z = x + iy : x < 0\}$

Soluzione: a).

Infatti per trovare l'insieme di definizione bisogna togliere da C i punti che annullano $(i - 2z)^2$; per trovare l'insieme di olomorfia bisogna togliere da C i punti che rendono $(i - 2z)^2$ reale negativo o nullo.

Inoltre la funzione ammette primitiva in ogni aperto semplicemente connesso contenuto nell'insieme di olomorfia e dunque in particolare in

$$C - \{z = x + iy : x \leq 0\} = \{z = x + iy : x > 0\}$$

D2)

Nome e Cognome ______________________________**matricola** ______________ B.3

Individuare le due regioni del piano complesso in cui la seguente funzione è sviluppabile in serie di Laurent centrata nel punto $z_0 = 2$,

$$f(z) = \frac{1}{z - 3i}$$

e calcolare lo sviluppo in quella fra le due regioni che è limitata.

a) $|z - 3i| < \sqrt{13}$, $|z - 3i| > \sqrt{13}$;

$$f(z) = \frac{1}{z - 3i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - 3i)^n}{(5 + 4i)^{n+1}} \quad |z - 3i| < \sqrt{13}$$

b) $|z - 2| < \sqrt{13}$, $|z - 2| > \sqrt{13}$

$$f(z) = \frac{1}{z - 3i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z - 2)^n}{(2 - 3i)^{n+1}} \quad |z - 2| < \sqrt{13}$$

c) $|z - 2| < 3$, $|z - 2| > 3$

$$f(z) = \frac{1}{z - 3i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z - 2)^n}{(2 - 3i)^n} \quad |z - 2| < 3$$

Soluzione: b).

Le due regioni sono il cerchio aperto di centro 2 e raggio $\sqrt{13}$ (che è pari alla distanza fra 2 e il punto singolare $3i$) e la corona circolare aperta di raggi $\sqrt{13}$ e $+\infty$. In tali regioni infatti la funzione è analitica e pertanto sviluppabile in serie di Laurent.

D3)

Quale di questi insiemi A del piano complesso può essere l'insieme degli zeri di una funzione analitica in C non identicamente nulla ?

a) A è la frontiera dell'insieme $T = \{z = x + iy : |x| \leq 2, |y| \leq 3\}$

b) $A = N$, N numeri naturali

c) $A = \{z = x + iy : |x| \leq 2, |y| \leq 3\}$

Motivare la risposta, enunciare il teorema che si è usato e dimostrarlo. Soluzione: b).

Si usa il teorema degli zeri isolati valido per funzioni analitiche.