ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica

Esame del 22 gennaio 2021

Nome e Cognome ______________________________**matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{8} \frac{1}{(z+3i)^n} e^{-in} 2^n,$$

dire dove è analitica e calcolare $\int_\gamma f(z)dz$ dove γ é la curva definita da $|z+3i| = \frac{1}{4}$.

Soluzioni: La somma di una serie di Laurent é analitica nella corona circolare dove convergono sia la parte singolare che la parte regolare. In questo caso la parte singolare é composta da un numero finito di termini e quindi converge purchè definita, cioé in $C - \{-3i\}$ che si puó scrivere come $0 < |z+3i|$. La parte regolare

$$\sum_{-\infty}^{n=0} \frac{1}{(z+3i)^n} e^{-in} 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (z+3i)^n e^{in} 2^{-n}$$

ha raggio di convergenza $\rho = 2$ in quanto

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{e^{i(n+1)} 2^{-(n+1)}}{e^{in} 2^{-n}} \right| = \frac{1}{2}$$

Dunque l'insieme di analiticitá é la corona circolare $0 < |z+3i| < 2$.

L'integrale richiesto vale $2\pi i c_{-1} = 4\pi i e^{-i}$

E 2 Data la successione di funzioni $(f_n(z))_{n\in N}$ di variabile complessa definita da

$$f_n(z) = (e^z - i)^n \quad z \in C,$$

individuare l'insieme A di convergenza puntuale e la funzione limite $f(z)$. Dire se la convergenza è uniforme in A. Se non lo è, individuare almeno un sottoinsieme di A in cui ci sia convergenza uniforme.

Soluzioni: L'insieme A è

$$A = \{z \in C : |e^z - i| < 1\} \cup \{z \in C : e^z = 1 + i\} =$$
$$\{z = x + iy : e^x < 2sen\, y\} \cup \{z = log(1+i) = log\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi),\ k \in Z\}$$

La funzione limite è

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad z \in \{z \in C : |e^z - i| < 1\} \\ 1 & \text{se} \quad z \in \{z \in C : e^z = 1 + i\} \end{cases}$$

Non c' è convergenza uniforme in A perchè la funzione limite è discontinua in A. La convergenza uniforme si ha nei sottoinsiemi $B_\alpha = \{z \in C : |e^z - i| \leq \alpha < 1\}$ perché

$$g_n = sup_{B_\alpha}|f_n(z)| = \alpha^n$$

e

$$lim_{n\to+\infty}\alpha^n = 0.$$

D 1 Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1) Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 5, definita nell'intervallo $[0, 5)$ come

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{|t-3|^\beta} & \text{se} \quad t \in [0,5) - \{3\} \\ \\ -2 & \text{se} \quad t = 3 \end{cases}$$

dire per quali valori di $\beta \in R$ è regolare a tratti in R e per quali è continua a tratti ma non regolare a tratti in R; per i valori per cui è regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nel punto $t = 15$ e $t = 16$.

a) regolare a tratti per $\beta \leq 0$; continua a tratti ma non regolare a tratti $-1 < \beta < 0$; $S(15) = \frac{15^3}{12^\beta}$; $S(16) = \frac{16^3}{13^\beta}$

b) regolare a tratti per $\beta \leq -1$ e per $\beta = 0$; continua a tratti ma non regolare a tratti per $-1 < \beta < 0$; $S(15) = \frac{125}{2^{1+\beta}}$; $S(16) = \frac{1}{2^\beta}$

c) regolare a tratti per $\beta \leq -1$; continua a tratti ma non regolare a tratti $\beta \leq 0$; $S(15) = \frac{5^3}{12^\beta}$; $S(16) = \frac{1}{13^\beta}$

2) Data la funzione $f(z) = \frac{sen\, z}{(z-\pi)^k} \quad k \in Z \quad k \leq 2$, dire per quali valori di k la funzione ammette primitiva in $C - \{\pi\}$ e calcolare il res $(f(z), \pi)$ al variare di k

a) esiste primitiva per $k \neq 1$; $res(f(z), \pi) = 0 \;\; se \; k \neq 1 \;\; e \;\; res(f(z), \pi) = 1 \;\; se \; k = 1$

b) esiste primitiva per $k \neq \pi$; $res(f(z), \pi) = 0 \;\; se \; k \neq \pi \;\; e \;\; res(f(z), \pi) = -1 \;\; se \; k = \pi$

c) esiste primitiva per $k \neq 2$; $res(f(z), \pi) = 0 \;\; se \; k \neq 2 \;\; e \;\; res(f(z), \pi) = -1 \;\; se \; k = 2$

3) Usando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione $y_n(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = n\, y(t) \star H(t) \\ y(0) = n \end{cases}$$

dove $y(t) \star H(t)$ denota la convoluzione fra $y(t)$ e la funzione gradino unitario.

a)

$$y_n(t) = n\cosh(nt).$$

b)

$$y_n(t) = n\cos(\sqrt{n}t).$$

c)

$$y_n(t) = n\cosh(\sqrt{n}t).$$

Soluzione: b),c), c)