ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica

Esame del 22 gennaio 2021

Nome e Cognome ______________________________**matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{4} \frac{1}{(z-3i)^n} e^{1+3in-n^2},$$

dire dove è analitica e calcolare $\int_\gamma f(z)dz$ dove γ é la curva definita da $|z-3i| = \frac{1}{5}$.

Soluzioni: La somma di una serie di Laurent è analitica nella corona circolare dove convergono sia la parte singolare che la parte regolare. In questo caso la parte singolare é composta da un numero finito di termini e quindi converge purchè definita, cioè in $C - \{3i\}$ che si può scrivere come $0 < |z-3i|$. La parte regolare

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(z-3i)^n} e^{1+3in-n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-3i)^n e^{1-3in-n^2}$$

ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$ in quanto

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{e^{1-3i(n+1)-(n+1)^2}}{e^{1-3in-n^2}} \right| = 0$$

Dunque l'insieme di analiticità è la corona circolare $C - \{3i\}$.

L'integrale richiesto vale $2\pi i c_{-1} = 2\pi i e^{3i}$.

E 2 Data la successione di funzioni $(f_n(z))_{n\in N}$ di variabile complessa definita da

$$f_n(z) = (iz + Im(z))^n \quad z \in C,$$

individuare l'insieme A di convergenza puntuale e la funzione limite $f(z)$. Dire se la convergenza è uniforme in A. Se non lo è, individuare almeno un sottoinsieme di A in cui ci sia convergenza uniforme.

Scrivendo $z \in C$ come $z = x + iy$, l'insieme A di convergenza puntuale è

$$A = \{z \in C : |iz + Im(z)| = |ix| = |x| < 1\} =$$
$$\{z \in C : y \in R, -1 < x < 1\}$$

La funzione limite è $f(z) \equiv 0$. Non c' è convergenza uniforme in A perchè

$$g_n = \sup_A |f_n(z)| = \sup_{\{|x|<1\}} |x|^n = 1 \quad \forall n \in N.$$

La convergenza uniforme si ha invece nei sottoinsiemi $B_\alpha = \{z \in C : |x| \le \alpha < 1\}$ perchè

$$sup_{\{|x| \le \alpha\}} |x|^n = \alpha^n$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha^n = 0.$$

Notare che non si verifica mai $iz + Im(z) = 1$.

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1) Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 6, definita nell'intervallo $[0, 6)$ come

$$f(t) = \begin{cases} e^t |t-3|^\beta & \text{se} \quad t \in [0,6) - \{3\} \\ \\ 6 & \text{se} \quad t = 3 \end{cases}$$

dire per quali valori di $\beta \in R$ è regolare a tratti in R e per quali è continua a tratti ma non regolare a tratti in R; per i valori per cui è regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nel punto $t = 24$ e $t = 19$.

a) regolare a tratti per $\beta \ge 0$; continua a tratti ma non regolare a tratti $\beta < 0$; $S(24) = e^{24}\, 21^\beta$; $S(19) = e^{19} 16^\beta$

b) regolare a tratti per $\beta \ge 1$ e per $\beta = 0$; continua a tratti ma non regolare a tratti per $0 < \beta < 1$; $S(24) = \frac{(e^6+1)3^\beta}{2}$; $S(19) = e\, 2^\beta$

c) regolare a tratti per $\beta \ge 1$ e per $\beta = 0$; continua a tratti ma non regolare a tratti per $0 < \beta < 1$; $S(24) = e^{24}\, 21^\beta$; $S(19) = e^{19} 16^\beta$

2) Data la funzione $f(z) = (sen\, z)^2 (z - \pi)^k \quad k \in Z,\ k \ge -3$, dire per quali valori di k la funzione ammette primitiva in $C - \{\pi\}$ e calcolare il res $(f(z), \pi)$ al variare di k

a) esiste primitiva per $k \ne -1$; $res(f(z), \pi) = 0 \ \ se\ k \ne 1 \ \ e \ \ res(f(z), \pi) = 1 \ \ se\ k = -1$

b) esiste primitiva per $k \ne 3$; $res(f(z), \pi) = 0 \ \ se\ k \ne 3 \ \ e \ \ res(f(z), \pi) = -1 \ \ se\ k = 3$

c) esiste primitiva per $k \ne -3$; $res(f(z), \pi) = 0 \ \ se\ k \ne -3 \ \ e \ \ res(f(z), \pi) = 1 \ \ se\ k = -3$

3) Usando la trasformata di Laplace, calcolare per $t \ge 0$ la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau)\, d\tau + H(t-1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a)

$$y(t) = \ senh\,(t-1) \quad t \ge 0$$

b)

$$y(t) = \ cosh\,(t-1) H(t-1) \quad t \ge 0$$

c)

$$y(t) = senh\,(t-1)H(t-1) = \begin{cases} senh\,(t-1) & t \geq 1 \\ 0 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

Soluzioni: b),c),c)