ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 22 giugno 2020

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

(i) Data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, si dia la definizione di successione delle somme parziali n-me e di somma della serie.

(ii) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(arctng\, 2x)^n - (arctng\, 2x)^{n+1}],$$

si costruisca la successione delle somme parziali n-me, si calcoli la somma della serie e si dica dove la convergenza della serie è uniforme.

R:

(i) La successione delle somme parziali n-me è definita come

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad n \geq 1$$

e la somma $S(x)$ della serie è

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$$

(ii) Serie telescopica

$$S_n(x) = (arctng\, 2x) - (arctng\, 2x)^{n+1}$$

e

$$S(x) = \begin{cases} (arctng\, 2x) & -\frac{tg\,1}{2} < x < \frac{tg\,1}{2} \\ 0 \quad x = \frac{tg\,1}{2} \end{cases}$$

Non c'è convergenza uniforme in tutto l'insieme di convergenza puntuale perchè la somma $S(x)$ è discontinua, convergenza uniforme in ogni intervallo compatto $[a, b] \subset (-\frac{tg\,1}{2}, \frac{tg\,1}{2})$.

E 2

(i) Si enunci la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(z)$ sia olomorfa in un aperto A del piano complesso.

(ii) Si determini una funzione olomorfa che abbia come parte immaginaria

$$v(x, y) = y - e^x\, sen\, y$$

R:

(i) $f(z)$ deve essere differenziabile come funzione delle due variabili x e y e deve soddisfare le condizioni di Cauchy-Riemann.

(i) Dalle condizioni di Cauchy-Riemann segue

$$u_x = v_y = 1 - e^x cos\, y$$
$$u_y = -v_x = e^x sen\, y$$

Integrando la prima rispetto a x si ottiene

$$u(x,y) = x - e^x cos\, y + h(y).$$

Integrando la seconda rispetto a y si ottiene

$$u(x,y) = -e^x cos\, y + g(x).$$

Scegliendo $g(x) = x$ e $h(y) = c$ si ottiene

$$u(x,y) = x - e^x cos\, y + c$$

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta. Le risposte sbagliate saranno valutate -1.

1) Data la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π e definita in $(-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = x^k\, senx, \quad k \in \{1, 2, 3, ...\},$$

dire per quali valori di $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ la sua serie di Fourier converge totalmente in R :

(a) $\forall k$
(b) per nessun valore di k
(c) $\forall k$ dispari

2) Calcolando il seguente integrale

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)x} dx$$

con i metodi della variabile complessa, il risultato è :
(a) $2\pi i$
(b) 0
(c) $\frac{\pi}{4}$

3) Data la funzione

$$f(z) = \sum_{n=-9}^{+\infty} (z-i)^n \frac{1}{|n+10|^{|n|}},$$

essa ha:
(a) una singolarità essenziale con residuo 0
(b) una singolarità di tipo polo di ordine 9 con residuo $\frac{1}{9}$
(c) una singolarità di tipo polo di ordine 10 con residuo 0

R: a), b), b).