ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 24 gennaio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Trovare l'insieme di convergenza assoluta e totale della serie di funzioni in campo reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n e^{n(x+1)}}, \quad x \in R$$

Soluzione:

Insieme di convergenza assoluta $C = (-1, +\infty)$.

Insiemi di convergenza totale $H_a = [a, +\infty), \quad a > -1$

(Studiare la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \quad t = e^{-(x+1)}$)

E 2 Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 5, definita nell'intervallo $[0, 5)$ come

$$f(t) = \begin{cases} e^t\,|t-3|^{-\beta} & \text{se} \quad t \in [0,5) - \{3\} \\ \\ 5 \quad \text{se} \quad t = 3 \end{cases}$$

dire per quali valori di $\beta \in R$ è regolare a tratti in R e per quali è di quadrato sommabile ma non regolare a tratti in R; per i valori per cui è regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nel punto $t = 15$ e $t = 16$.

Soluzione:

Regolare a tratti per $\beta \leq -1$ e per $\beta = 0$.

Quadrato sommabile ma non regolare a tratti per $\beta \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

$S(15) = S(5) = \frac{e^5\,2^{-\beta} + 3^{-\beta}}{2}$

$S(16) = S(1) = f(1) = e\,2^{-\beta}$

D

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta motivandola brevemente.

(1) Individuare l'insieme di analiticità delle seguenti funzioni e dire quale delle tre non ammette primitiva in tale insieme

a) $f(z) = \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}$

b) $f(z) = \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^5}$

c) $f(z) = \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$

Soluzione: a), l'unica che ha residuo in $\frac{\pi}{2}$ non nullo. Per calcolare il residuo delle funzioni scrivere $cos\, z = -sen\,(z - \frac{\pi}{2})$, sviluppare in serie e prendere c_{-1}.

(2)

Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa:

$$\int_\gamma \frac{1}{e^{i4\pi^2 z} - 1}$$

dove γ è la frontiera del quadrato $T = \{(x, y) : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2},\, -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}$

a)$\frac{7}{\pi}$
b)$\frac{7}{2\pi}$
c)$\pi i \frac{7}{2}$

Soluzione: b), punti singolari $z_k = \frac{k}{2\pi}$ $k \in Z$. Tutti poli semplici con $res(f(z), z_k) = \frac{1}{i4\pi^2}$.
Cadono entro γ z_k con $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Per il teorema dei residui la risposta è la b).

(3) Calcolare l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace del seguente segnale

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se} \quad 0 \le t \le 3 \\ \\ e^{(2i+10)t} \; \chi_{[6,8]}(t) & \text{se} \quad t > 3 \end{cases}$$

(la funzione $\chi_{[6,8]}(t)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[6, 8]$)

a)$\sigma[f] = -\infty, \qquad L[f] = \frac{e^{(1-s)3}-1}{1-s} + \frac{e^{(2i+10-s)8} - e^{(2i+10-s)6}}{2i+10-s}$
b)$\sigma[f] = 10 \qquad L[f] = \frac{e^{(1-s)3}-1}{1-s} - \frac{e^{(2i+10-s)3}}{2i+10-s}$
c)$\sigma[f] = -\infty \qquad L[f] = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-(2i+10)}$

Soluzione: a)