ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 24 gennaio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Trovare l'insieme di convergenza assoluta e totale della serie di funzioni in campo reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\; e^{n(1-x)}}, \quad x \in R$$

Soluzione:

Insieme di convergenza assoluta $C = (-\infty, 1)$.

Insiemi di convergenza totale $H_a = (-\infty, a])$, $\quad a < 1$

(Studiare la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$, $\quad t = e^{(x-1)}$)

E 2 Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 6, definita nell'intervallo $[0, 6)$ come

$$f(t) = \begin{cases} (1+t)\,|t-3|^{\beta} & \text{se} \quad t \in [0,6) - \{3\} \\ \\ 2 & \text{se} \quad t = 3 \end{cases}$$

dire per quali valori di $\beta \in R$ è regolare a tratti in R e per quali è di quadrato sommabile ma non regolare a tratti in R; per i valori per cui è regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nel punto $t = 24$ e $t = 19$. Soluzione:

Regolare a tratti per $\beta \geq 1$ e per $\beta = 0$.

Quadrato sommabile ma non regolare a tratti per $\beta \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1)$

$S(24) = S(6) = \frac{7\; 3^{\beta} + 3^{\beta}}{2}$

$S(19) = S(1) = f(1) = 2^{\beta+1}$

D

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta motivandola brevemente.

(1) Individuare l'insieme di analiticità delle seguenti funzioni e dire quale delle tre ammette primitiva in tale insieme

a) $f(z) = \frac{sen\, z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}$

b) $f(z) = \frac{sen\, z}{(z-\frac{\pi}{2})^5}$

c) $f(z) = \frac{sen\, z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}$

Soluzione: a), l'unica che ha residuo in $\frac{\pi}{2}$ nullo. Per calcolare il residuo delle funzioni scrivere $sen\, z = cos\,(z - \frac{\pi}{2})$, sviluppare in serie e prendere c_{-1}.

(2)

Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa:

$$\int_\gamma \frac{|z|}{e^{iz}-1}dz$$

dove γ è la curva $|z|=2$

a)$\frac{4}{\pi}$
b)4π
c)πi

Soluzione: b). Osservare che lungo la curva $|z|=2$ e dunque si porta fuori dall'integrale. I punti singolari della $z_k = 2k\pi \;\; k \in Z$. Tutti poli semplici con $res(\frac{1}{e^{iz}-1}, z_k) = \frac{1}{i}$.

Cade entro γ z_k con $k=0$.

Per il teorema dei residui la risposta è la b).

(3) Calcolare l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace del seguente segnale

$$f(t) = e^{10t}\chi_{[0,5]}(t) \; + \; e^{(2i-2)t}\chi_{(5,+\infty)}(t)$$

(la funzione $\chi_{[0,5]}(t)$ e $\chi_{(5,+\infty)}(t)$ sono le funzioni caratteristiche degli intervalli $[0,5]$ e $(5,+\infty)$)

a)$\sigma[f] = -\infty, \qquad L[f] = \frac{e^{(10-s)5}-1}{10-s} - \frac{e^{(2i-2-s)5}}{2i-2-s}$
b)$\sigma[f] = -2 \qquad L[f] = \frac{e^{(10-s)5}-1}{10-s} - \frac{e^{(2i-2-s)5}}{2i-2-s}$
c)$\sigma[f] = 10 \qquad L[f] = \frac{1}{s-10} + \frac{1}{s-(2i-2)}$

Soluzione: b)