ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 24 gennaio 2022

Nome e Cognome ____________________ **matricola** __________

Firma ____________________

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Trovare l'insieme di convergenza assoluta e totale della serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, e^{nz}}, \quad z \in C$$

Soluzione: l'insieme C di convergenza assoluta è $C = \{z = x + iy \in C : x > 0\}$.

La convergenza totale si ha in ogni insieme $H_a = \{z = x + iy \in C : x \geq a > 0\}$.

(Studiare la serie di potenze in campo complesso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}, \quad w = e^{-z}$) e ricordare che $|e^{-z}| = e^{-Re(z)}$.)

E 2 Usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y(t)$ del seguente problema

$$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = H(t-1), \quad t \geq 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

dove $H(t)$ è la funzione gradino unitario. Soluzione: $y(t) = 2\, cos\, t\, H(t) + sen\,(t-1) H(t-1)$

D

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta motivandola brevemente.

(1) Data la funzione

$$f(z) = \frac{sen\, z}{z^h} \quad h \in Z,$$

definita in C^* se $h > 0$ e in C se $h \leq 0$, dire per quali valori di h il suo residuo in $z_0 = 0$ è diverso da zero:

a) $h \in \{1, 3, 5, ...\}$

b)$h \in \{2, 4, 6, ...\}$

c) $h \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Soluzione: b) Per calcolare il residuo delle funzioni, svilupparle in serie e prendere c_{-1}.

(2) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa:

$$\int_\gamma \frac{1}{sen(\pi z)} dz$$

dove γ è la curva $|z| = \frac{3}{2}$

a)$2i$

b)$-2i$

c)πi

Soluzione: b), punti singolari $z_k = k\;\; k \in Z$. Tutti poli semplici con $res(f(z), z_k) = \frac{1}{\pi(cos\,(\pi k))}$.

Cadono entro γ z_k con $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Per il teorema dei residui la risposta è la b).

(3) Data la seguente funzione periodica di periodo 8 e definita in $[-4, 4)$ come

$$f(t) = \begin{cases} |t-1| \qquad t \in (-4,0) \\ \\ sen\, t \qquad t \in (0,4) \\ \\ \gamma \qquad t = -4 \\ \\ \beta \qquad t = 0 \end{cases}$$

verificare che è regolare a tratti in R e dire come bisogna scegliere i valori $\gamma, \beta \in R$ affinchè la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier coincida con $f(t)$ in tutto R.

a)$\gamma = \frac{3+sen4}{2} \quad e \quad \beta = 0$

b)$\gamma = \frac{5-sen4}{2} \quad e \quad \beta = \frac{1}{2}$

c)$\gamma = \frac{5+sen4}{2} \quad e \quad \beta = \frac{1}{2}$

Soluzione: c) Usare il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier di ina funzione regolare a tratti in R.