ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 24 gennaio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Trovare l'insieme di convergenza assoluta e totale della serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ e^{n(1-z)}}, \quad z \in C$$

Soluzione: l'insieme C di convergenza assoluta è $C = \{z = x + iy \in C : x < 1\}$.

La convergenza totale si ha in ogni insieme $H_a = \{z = x + iy \in C : x \leq a < 1\}$.

(Studiare la serie di potenze in campo complesso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n}, \quad w = e^{z-1}$) e ricordare che $|e^{z-1}| = e^{Re(z)-1}$.)

E 2 Usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y(t)$ del seguente problema

$$\begin{cases} y'(t) = e^t \star H(t) \quad t \geq 0 \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

dove $H(t)$ è la funzione gradino unitario e $\star$ rappresenta il prodotto di convoluzione.

Soluzione: $y(t) = 2H(t) + (e^t - t - 1)H(t)$

D

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta motivandola brevemente.

(1) Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^h} \quad h \in Z,$$

definita in C^* se $h > 0$ e in C se $h \leq 0$, dire per quali valori di h il suo residuo in $z_0 = 0$ è diverso da zero:

a) $h \in \{2, 3, 4, ...\}$

b)$h = 1$

c) $h \in \{..., . - 3, -2, -1\}$

Soluzione: a) Per calcolare il residuo delle funzioni, svilupparle in serie e prendere c_{-1}.

(2) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa:

$$\int_{\gamma} \frac{|z|}{sen\, z} dz$$

dove γ è la curva $|z| = 2$

a)$4i$
b)$-\pi i$
c)$4\pi i$

Soluzione: c) Osservare che lungo la curva $|z| = 2$ e dunque si porta fuori dall'integrale. I punti singolari della $z_k = k\pi \;\; k \in Z$. Tutti poli semplici con $res(\frac{1}{sen\, z}, z_k) = \frac{1}{cos\,(k\pi)}$.

Cade entro γ z_k con $k = 0$.

Per il teorema dei residui la risposta è la c)

(3) Data la seguente funzione periodica di periodo 8 e definita in $[-4, 4)$ come

$$f(t) = \begin{cases} |t-1| & t \in (-4, 1) \\ sen\, t & t \in (1, 4) \\ \gamma & t = -4 \\ \beta & t = 1 \end{cases}$$

verificare che è regolare a tratti in R e dire come bisogna scegliere i valori $\gamma, \beta \in R$ affinchè la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier coincida con $f(t)$ in tutto R.

a)$\gamma = \frac{5+sen4}{2} \quad e \quad \beta = \frac{sen1}{2}$
b)$\gamma = \frac{5-sen4}{2} \quad e \quad \beta = \frac{sen1}{2}$
c)$\gamma = \frac{3+sen4}{2} \quad e \quad \beta = \frac{1}{2}$

Soluzione: a) Usare il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier di ina funzione regolare a tratti in R.