# ANALISI MATEMATICA II
**Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica**

**Esame del 25 marzo 2021**

**Nome e Cognome** ________________________________________ **matricola** ____________________

**Firma** ____________________________________________________________

**MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE**

**E 1**

Data la successione di funzioni, definita per $x \in [0, +\infty)$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & se \quad 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ \\ 1 & se \quad x > \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

L'insieme di convergenza puntuale è $A = (0, +\infty)$ e la funzione limite è la funzione $f(x) \equiv 1$.

La convergenza non è uniforme in $A$, ma lo è in ogni $B_\alpha = [\alpha, +\infty), \alpha > 0$.

Infatti per ogni $n \ge 1$ si ha

$$g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = 2n - 1$$

e $\lim_{n\to+\infty} 2n - 1 = +\infty$, dunque non c'è convergenza uniforme in $A$.

Invece per ogni $n > \frac{1}{2\alpha}$ si ha

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, dunque c'è convergenza uniforme in $B_\alpha$.

**E 2**

-Dare la definizione di funzione $f(t)$ regolare a tratti in $R$.

-Dire come converge la serie di Fourier di una funzione $f(t)$ periodica di periodo $T$ e regolare a tratti in $R$ e quanto vale la sua somma $S(t)$.

-Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 3 e definita nell'intervallo $[0, 3)$ come

$$f(t) = \begin{cases} (2 - t^2) & se \quad t \in (0, 3) \\ \\ b & se \quad t = 0, \end{cases}$$

con $b \in R$, dire, motivando la risposta:

1) quanto vale la somma $S(t)$ della serie di Fourier di $f(t)$ nei punti $t = 3k, \quad k \in Z$

2) per quale valore del parametro $b$ si ha $S(t) = f(t)$ $\forall t \in R$.

Soluzione:

1) $S(3k) = -\frac{5}{2}$

2) $b = -\frac{5}{2}$

**D 2**

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta motivandola.

(1) Dire in quale dei seguenti aperti del piano complesso la funzione

$$f(z) = sen\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

ammette primitiva

a) $\{z = x + iy : y > -1\}$

b) $\{z = x + iy : x > 2\}$

c) $\{z = x + iy : |z - 2| < 1\}$

Soluzione: b) perchè tale insieme è l'unico che non contiene il punto singolare $z = 2$ dove il residuo della funzione vale $c_{-1} = 1 \neq 0$. Gli altri due insiemi contengono $z = 2$ e pertanto gli integrali lungo le curve chiuse che circuitano tale punto non sono nulli. Dunque in essi non è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva.

(2) Usando la trasformata di Laplace (o, in alternativa, la definizione di convoluzione), determinare il segnale

$$f(t) = cos\, t \star H(t-1),\ t \geq 0.$$

a) $H(t)sen(t-1)$

b)$H(t-1)sent$

c) $H(t-1)sen(t-1)$

Soluzione: c). Infatti

$$cos\, t \star H(t-1) = \begin{cases} \int_0^{t-1} cos\, \tau H(t-\tau-1)d\tau & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases} = \begin{cases} sen\,(t-1) & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

(3) Dare la definizione di $Logz,\ z \in C^*$ (determinazione principale del logaritmo) e dire in quale regione $Logz$ è un numero reale maggiore o uguale a zero:

a) $\{z = x + iy : x = 0, y > 0\}$

b) $\{z = x + iy : x \geq 1, y = 0\}$

c) $\{z = x + iy : x > 0, y = 0\}$

Soluzione: b) Infatti $Logz = log|z| + iArgz$; per essere $Logz$ reale deve essere $Argz = 0$ cioè z=x reale positivo; per essere $Logz$ reale maggiore o uguale a zero deve essere $|z| \geq 1$.