ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 25 marzo 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Scrivere la successione delle somme parziali n-me, $S_1(x), S_2(x), ..., S_n(x), ...$ della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n+1} - x^n)$$

Individuare l'insieme di convergenza puntuale della serie e la sua somma $S(x)$.

Soluzione: si tratta di una serie telescopica e

$$S_1(x) = x^2 - x,$$
$$S_2(x) = x^2 - x + x^3 - x^2 = x^3 - x,$$
$$...$$
$$S_n(x) = x^{n+1} - x$$
$$....$$

L'insieme di convergenza puntuale A della serie coincide con l'insieme di convergenza puntuale della successione $(S_n(x))_{n\in N}$ delle somme parziali n-me e la somma $S(x)$ della serie coincide con la funzione limite della successione $(S_n(x))_{n\in N}$. Dunque $A = (-1, 1]$ e

$$S(x) = \begin{cases} 0 \quad se \quad x = 1 \\ \\ -x \quad se \quad x \in (-1, 1) \end{cases}$$

E 2

(i) Provare l'unicità dello sviluppo in serie di potenze in campo complesso.

(ii) Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{1 + 7z^5} \quad z \in C,$$

calcolare $f^{(25)}(0)$ (derivata 25-ma calcolata nel punto $z_0 = 0$)

Soluzione:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 7^n z^{5n} \qquad se \quad |z| < \frac{1}{7^{\frac{1}{5}}}$$

Dall'unicità dello sviluppo in serie di potenze segue

$$f^{(25)}(0) = 25!\, a_{25} = -25!\, 7^{25}$$

(a_{25} rappresenta il coefficiente della potenza z^{25}).

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivandola molto brevemente:

1) Detto z_0 un punto singolare per una funzione $f(z)$, dire quando esso è un polo di ordine n per $f(z)$, quando è una singolarità eliminabile e quando è una singolarità essenziale.

Determinare i punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(z^4)}{(\sin z)^4},$$

e dire di che tipo di singolarità si tratta.

a) $z = 0$, singolarità eliminabile

b) $z = k\pi,\ k \in Z$. Per $k = 0$ singolarità eliminabile, per $k \neq 0$ polo di ordine 4.

c) $z = k\pi,\ k \in Z$. Per ogni $k \in Z$ poli di ordine 4.

2) Usando la trasformata di Laplace, trovare il segnale che risolve:

$$y(t) \star t^2 = \alpha(t-1)^3 + \beta t^4, \quad t \geq 0$$

Determinare i parametri $\alpha \in R$ e $\beta \in R$ in modo tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.

a) $y(t) = (3\alpha + 12\beta t)H(t-1)$; $\alpha = 0,\ \beta \in R$.

b) $y(t) = (3\alpha + 12\beta t)H(t)$; $\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{4}$.

c) $y(t) = 3\alpha\, H(t-1) + 12\beta\, t\, H(t)$; $\alpha \in R,\ \beta = \frac{1}{4}$.

3)

Dare un esempio di funzione $f_1(z)$ che abbia in $z_0 = i$ una singolarità essenziale con residuo nullo e di una funzione $f_2(z)$ che abbia in $z_0 = i$ una singolarità essenziale con residuo diverso da zero.

a)$f_1(z) = sen\left(\frac{1}{(z-i)^4}\right),\ f_2(z) = sen\left(\frac{1}{z-i}\right)$

b)$f_1(z) = \frac{1}{(z-i)^8},\ f_2(z) = \frac{1}{z-i}$

c)$f_1(z) = e^{\frac{1}{(z-i)^4}},\ f_2(z) = e^{\frac{1}{(z-i)^2}}$

Soluzioni: b), c) , a)