ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 29 aprile 2020

Nome e Cognome ______________________________**matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

(i) Data la funzione
$$f(z) = \frac{1}{e^z + 2}$$
trovare l'insieme dei suoi punti singolari e calcolarne il residuo.

(ii) Trovare un insieme del piano complesso in cui $f(z)$ ammetta primitiva.

Risposta

Infiniti punti singolari : $z_k = log(-2) = log|-2| + i\, arg(-2) = log2 + i(\pi + 2k\pi), \quad k \in Z$
$$res(f(z), z_k) = \frac{1}{e^{z_k}} = -\frac{1}{2} \quad \forall k \in Z$$
La funzione ammette primitiva in ogni aperto semplicemente connesso contenuto nell'aperto di olomorfia cioè contenuto in $C - \cup\{z_k\}$. Per esempio nel semipiano $Re(z) > log2$.

E 2

(i) Individuare l' insieme di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(t)$, della seguente successione di funzioni definita per $t \in R$
$$f_n(t) = e^{(t-n^2)}$$

(ii) Dire se la convergenza è uniforme in A; se non lo è, individuare un sottoinsieme di A in cui c'è convergenza uniforme.

Risposta

La successione converge puntualmente in $A = R$ alla funzione f identicamente nulla.
Poichè, per ogni $n \in N$ fissato, si ha
$$g_n = \sup_{t \in R} e^{(t-n^2)} = +\infty$$
e dunque
$$\lim_{n \to +\infty} g_n = +\infty,$$
non si ha convergenza uniforme in tutto $A = R$, ma solo negli insiemi del tipo $(-\infty, \alpha)$, $\alpha \in R$.
In tali insiemi infatti
$$g_n = \sup_{t \in (-\infty, \alpha)} e^{(t-n^2)} = e^{(\alpha - n^2)}$$
e dunque
$$\lim_{n \to +\infty} g_n = 0,$$

Nome e Cognome ______________________________**matricola** ____________________ 1.2

D 2 Per ciascuna delle seguenti due domande si indichi la (sola) risposta esatta.

1) La funzione $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{(z-i)^k}$ ammette primitiva in $C - \{0, i\}$:
(a) $\forall k \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$
(b) solo per $k = 1$
(c) per $k \in Z, \quad k \neq 1$

2) Quale fra queste funzioni è continua nel suo insieme di definizione ma non regolare a tratti:
(a) $f(x) = \sqrt{x-1} \quad x \in [1, 2]$
(b) $f(x) = |sen\, x| \quad x \in [0, 2\pi]$
(c) $f(x) = |x|^3 \quad x \in [-1, 1]$

Risposta
(1) (c)
(2) (a)